

# Wellenfeldsynthese - Sattelpunktsapproximation

Franz Zotter

26. Mai 2020

## 1 Kirchhoff-Helmholtz-Integral

Das KHI erlaubt, Schallfelder  $p(\mathbf{x}_r)$  anhand der Randwerte  $p(\mathbf{x})$  und  $\nabla p(\mathbf{x})$  entlang einer Hüllfläche der Ortsvariable  $\mathbf{x}$  mit einem Integral über Green'sche Funktionen  $G(r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_r})$  bzw. ihrer Ableitung  $\nabla G(r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_r})$  nachzubilden, sofern der Beobachtungspunkt  $\mathbf{x}_r$  sich im Inneren der Hülle befindet

$$p(\mathbf{x}_r) = - \int [p(\mathbf{x}) \nabla G(r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_r}) - G(r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_r}) \nabla p(\mathbf{x})]^\top d\mathbf{S}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

Mit dem gewünschten Primärfeld einer Punktquelle  $p(\mathbf{x}) = G(r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0})$ , das wir mit dem Integral nachbilden wollen, erhalten wir:

$$p(\mathbf{x}_r) = - \int [G(r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}) \nabla G(r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_r}) - G(r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_r}) \nabla G(r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0})]^\top d\mathbf{S}(\mathbf{x}). \quad (2)$$

Die Theorie bestimmt auch, dass das Integral in Richtung der nach außen weisenden Oberflächennormale  $\mathbf{n}$  hin keine Schallwellen produzieren darf.

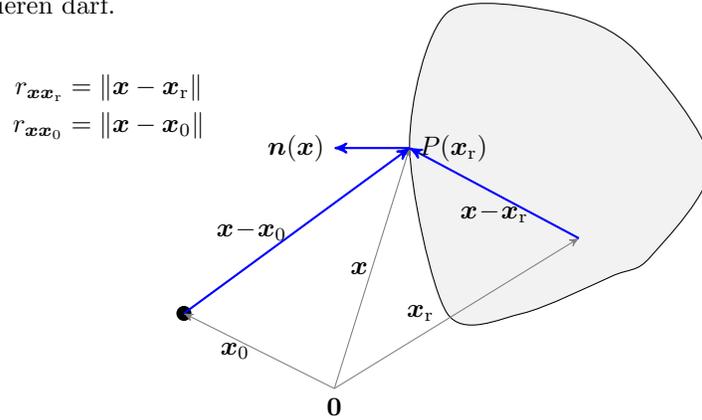


Abbildung 1: KHI Geometrie (Danke an Frank Schultz für die Skizze).

## 2 Ableitungen

Die Green'sche Funktion  $G = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r}$  der verlustlosen, linearen Helmholtzgleichung abgeleitet nach  $r$  ergibt bei  $kr \gg 1$

$$\frac{dG}{dr} = \frac{d \frac{e^{-ikr}}{4\pi r}}{dr} = -ik \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} - \frac{e^{-ikr}}{4\pi} \frac{1}{r^2} = -(ik + r^{-1}) G \approx -ik G, \quad (3)$$

und die Abstandsfunktion  $r$  nach einer Dimension abgeleitet oder ihr gesamter Gradient berechnet sich wie folgt

$$\frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{\partial \sqrt{\sum_{i=1}^D (x_i - x_{i,0})^2}}{\partial x_j} = \frac{1}{2\sqrt{\sum_{i=1}^D (x_i - x_{i,0})^2}} 2(x_j - x_{j,0}) = \frac{x_j - x_{j,0}}{r}, \quad \Rightarrow \nabla r = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}} = \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}. \quad (4)$$

Die zweiten Ableitungen ergeben die Einträge der Hessematrix und sind

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{x_j - x_{j,0}}{r} = \frac{\delta_{jk}}{r} - \frac{x_j - x_{j,0}}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x_k} = \frac{\delta_{jk}}{r} - \frac{(x_j - x_{j,0})(x_k - x_{k,0})}{r^3}, \quad (5)$$

$$\Rightarrow \mathbf{H}_r = \frac{1}{r} [\mathbf{I} - \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0} \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}^\top]. \quad (6)$$

### 3 Sattelpunktsapproximation des Integrals über 2 Dimensionen

Das Syntheseintegral wird mit dem Gradienten bei  $kr \gg 1$  zu

$$p(\mathbf{x}_r) = ik \int G(r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0})G(r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_r})[\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{x}\mathbf{x}_r} - \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}]^T d\mathbf{S}(\mathbf{x}). \quad (7)$$

Der Integrand  $\frac{[\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{x}\mathbf{x}_r} - \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}]^T \mathbf{n}(\mathbf{x})}{(4\pi)^2 r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0} r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_r}} e^{-ik(r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0} + r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_r})} =: f(\mathbf{x}) e^{-ikg(\mathbf{x})}$  beinhaltet neben seinem rein reellen Amplitudenausdruck  $f(\mathbf{x})$  den stark oszillierenden komplexen Zeiger  $e^{-ikg(\mathbf{x})}$  aus den Phasen beider Green'schen Funktionen. Der Sattelpunktsapproximation gemäß bleibt bei flächiger Integration über diese Ausdrücke nur eine Summe über jener Stellen des Integrals übrig, an denen die Phase des Zeigers stationär ist, also Extremwerte  $\nabla g = \mathbf{0}$  bezüglich der Integrationsvariablen besitzt. Der Gradientenvektor müsste zwar nicht in jedem Eintrag verschwinden, das müsste nur seine Projektion auf die beiden orthogonalen Flächentangententialvektoren,  $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$ , also  $3 \times 2$  ohne den Flächennormalvektor  $\mathbf{n}$ :

$$k \mathbf{U}^T \nabla [r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0} + r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_r}] = k \mathbf{U}^T [\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{x}\mathbf{x}_r} + \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}] = \mathbf{0}. \quad (8)$$

Da ein Einheitsvektor aber nur 2 Freiheitsgrade besitzt (weil er normiert ist), ergibt sich dennoch die selbe Forderung, als müsse der gesamte Gradient verschwinden:  $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0} = -\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{x}\mathbf{x}_r} = -\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{x}_0\mathbf{x}_r}$ , also gilt nur jene Stelle des Integrals als stationärer Punkt, die auf der euklidischen Verbindungslinie zwischen Quelle  $\mathbf{x}_0$  und Hörplatz  $\mathbf{x}_r$  liegt. In diesem Fall wird die Summe der Abstände  $r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0} + r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_r} = r_{\mathbf{x}_0\mathbf{x}_r}$  zum Abstand zwischen Quelle und Hörplatz. Wenn hauptsächlich dieser Durchstoßpunkt zum Wert des Integrals beiträgt, ist schon einmal die synthetisierte Phase korrekt, also jene des Primärfelds  $\angle G(r_{\mathbf{x}_0\mathbf{x}_r})$ . Vollständig lautet die Sattelpunktsapproximation für die stationären Punkte  $g'(\mathbf{x}_i) = 0$ ,

$$\int f(\mathbf{x}) e^{-ikg(\mathbf{x})} d\mathbf{x} = \sum_i f(\mathbf{x}_i) \sqrt{\frac{2\pi}{k}} \sqrt{\frac{1}{\det \mathbf{H}_g(\mathbf{x}_i)}} e^{-i\frac{\pi}{4} \text{sgnt} \mathbf{H}_g(\mathbf{x}_i)}, \quad (9)$$

wobei  $\text{sgnt} \mathbf{H}_g(\mathbf{x}_i)$  die Summe der Vorzeichen  $\text{sgn}$  der Eigenwerte bezeichnet. In unserem Fall ist die Phase (ohne  $k$ ) bestimmt durch  $g = r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0} + r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_r}$  und am stationären Punkt  $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0} = -\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{x}\mathbf{x}_r} = -\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{x}_0\mathbf{x}_r}$  wird die  $3 \times 3$  Hesse-Matrix  $\mathbf{H}_g^{(3)} = \left[ \frac{1}{r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}} + \frac{1}{r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_r}} \right] [\mathbf{I} - \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{x}_0\mathbf{x}_r} \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{x}_0\mathbf{x}_r}^T]$ . Auf die Integrationsrichtungen projiziert erhalten wir  $\mathbf{H}_g^{(2)} = \mathbf{U}^T \mathbf{H}_g^{(3)} \mathbf{U}$ . Ohne Verlust der allgemeinen Gültigkeit, weil die Determinante rotationsinvariant in  $2 \times 2$  ist, können wir das Problem in vereinfachter Lage, in  $x$  und  $y$ , formulieren, und die der Richtungsstrahl  $\boldsymbol{\theta}$  sei von der  $z$ -Achse weg um den Winkel  $\vartheta$  nach  $x$  geneigt

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \sin \vartheta \\ 0 \\ \cos \vartheta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}^T [\mathbf{I} - \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}^T] \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 - \sin^2 \vartheta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \vartheta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

womit die Determinante unter Hinzunahme des Faktors  $\left[ \frac{1}{r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}} + \frac{1}{r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_r}} \right]$  zum Quadrat ( $\det(Aa) = a^n \det A$ ) zu  $\det \mathbf{H}_g^{(2)} = \left[ \frac{1}{r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}} + \frac{1}{r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_r}} \right]^2 \cos^2 \vartheta$  wird. Zudem ist die Signatur  $\text{sgnt} \mathbf{H}_g^{(2)}(\mathbf{x}_i) = 2$ . Weil hier  $\mathbf{x}$  der stationäre Punkt sein muss, vereinfacht sich die Summe der Abstände  $\left[ \frac{1}{r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_r}} + \frac{1}{r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}} \right]^2 \cos^2 \vartheta = \left[ \frac{r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_r} + r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}}{r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_r} r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}} \right]^2 \cos^2 \vartheta = \left[ \frac{r_{\mathbf{x}_0\mathbf{x}_r}}{r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_r} r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}} \right]^2 \cos^2 \vartheta$ . In der konvexen Hüllen gibt es nur einen brauchbaren stationären Punkt. Wir erhalten also keine Summe sondern einen Einzelausdruck als Näherungswert. Dieser ist erfreulicher Weise exakt das gewünschte Primärfeld:

$$p(\mathbf{x}_r) = ik G(r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0})G(r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_r})(-2\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{x}_0\mathbf{x}_r})^T \frac{2\pi}{k} \frac{r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_r} r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}}{r_{\mathbf{x}_0\mathbf{x}_r} \cos \vartheta} \frac{1}{i} \mathbf{n}(\mathbf{x}) = G(r_{\mathbf{x}_0\mathbf{x}_r}). \quad (11)$$

Für dieses Ergebnis, wurde der Wert der Projektion  $-\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{n}$  gemäß der nach außen weisenden Flächennormalen  $\mathbf{n}$  mit  $\cos \vartheta$  angesetzt und durch den Ausdruck  $\cos \vartheta$  im Nenner gekürzt. Eingesetzt muss in das perfekt funktionierende Flächenintegral  $\int DG(r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_r}) d\mathbf{S}$  somit die Treiberfunktion für die Sekundärquelle  $G(r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_r})$  werden

$$D = ik 2 \max\{\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{x}_0\mathbf{x}_r}^T \mathbf{n}, 0\} G(r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}). \quad (12)$$

Der Maximumoperator erzwingt, dass die Treiberfunktion nur für eine außerhalb des Synthesevolument liegende Primärquelle aktiviert wird; eine Forderung aus der Theorie der Kirchhoff-Helmholtz-Integralgleichung. Wenn nun die Ingeration über die  $y$ -Achse weg gelassen wird und nur ein Linienintegral berechnet wird: Wie muss das Ergebnis korrigiert werden, damit wir auch damit noch zufrieden sein können?

## 4 Sattelpunktsapproximation des Integrals über 1 Dimension und Korrektur, um die zweite Dimension weglassen zu dürfen "2.5D"

Wir setzen  $\mathbf{U} = [1, 0, 0]^T$  als Dimension eines Linienintegrals an und erhalten aus der Forderung, dass der Gradient null werden muss:

$$\theta_{\mathbf{x}, \mathbf{x}\mathbf{x}_r} = -\theta_{\mathbf{x}, \mathbf{x}\mathbf{x}_0}, \quad (13)$$

d.h. hier müssten auch nur die Tangentialkomponenten in der Richtung exakt entgegengesetzt sein, also gemeinsam auf einem axialsymmetrischen Kegel um die Linie liegen. Die Hessematrix wird durch Projektion auf die Integrationsrichtung zu

$$g'' = \left[ \frac{1}{r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}} + \frac{1}{r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_r}} \right] (1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta). \quad (14)$$

Primärquelle und Integrationslinie liegen auf einer Halbebene, und der Hörplatz und die Integrationslinie auf einer anderen. Mit der Integrationslinie als Gelenk, soll zwischen den beiden Halbebenen ein Winkel von  $180^\circ$  liegen, damit  $\cos^2 \varphi = 1$  und für den stationären Punkt erhalten wir  $r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0} + r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_r} = r_{\mathbf{x}_0\mathbf{x}_r}$ . Damit ergibt sich vereinfacht:

$$g'' = \frac{r_{\mathbf{x}_0\mathbf{x}_r}}{r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_r} r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}} \cos^2 \vartheta. \quad (15)$$

Wir erhalten mit  $D = 1$ ,  $\det \mathbf{H} = g''$ ,  $\text{sgnt} \mathbf{H} = 1$  aus der Sattelpunktsapproximation Gl. (9) den Wert des Integrals

$$p(\mathbf{x}_r) = ik G(r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}) G(r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_r}) (-2\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{x}_0\mathbf{x}_r})^T \sqrt{\frac{2\pi}{k}} \sqrt{\frac{r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_r} r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}}{r_{\mathbf{x}_0\mathbf{x}_r} \cos^2 \vartheta}} \frac{1}{\sqrt{i}} \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{ik}{2\pi}} \sqrt{\frac{r_{\mathbf{x}_0\mathbf{x}_r}}{r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_r} r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}}} G(r_{\mathbf{x}_0\mathbf{x}_r}). \quad (16)$$

Die Vorfaktoren vor dem gewünschten Ergebnis  $G(r_{\mathbf{x}_0\mathbf{x}_r})$  verdeutlichen, dass wir eine Entzerrung der Synthese für den Hörplatz  $\mathbf{x}_r$  brauchen. Auf der Verbindungslinie zu Quelle  $\mathbf{x}_0$  ist dem Hörplatz  $\mathbf{x}_r$  ein stationärer Punkt  $\mathbf{x}$  zugeordnet, dessen Sekundärquelle so korrigiert wird, dass die Synthese keine Vorfaktoren mehr aufweist. Die Sekundärquelle bei  $\mathbf{x}$  wird dazu mit einer modifizierten, sog. 2.5D, Treiberfunktion angesteuert, die die reziproken Vorfaktoren inkludiert:

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{\frac{2\pi}{ik}} \sqrt{\frac{r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_r} r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}}{r_{\mathbf{x}_0\mathbf{x}_r}}} \overbrace{ik \, 2\max\{\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{x}_0\mathbf{x}_r}^T \mathbf{n}, 0\}}^{3D} G(r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}) \\ &= \sqrt{2\pi ik} \sqrt{\frac{r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_r} r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}}{r_{\mathbf{x}_0\mathbf{x}_r}}} 2\max\{\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{x}_0\mathbf{x}_r}^T \mathbf{n}, 0\} G(r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}). \end{aligned} \quad (17)$$

Dabei darf es zu jeder Sekundärquelle exakt einen Hörplatz geben, an dem jeweils im vordefinierten Abstand  $r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_r}$  die Synthese korrigiert wurde. Dieser Abstand darf mit  $\mathbf{x}$  variieren. Allerdings nicht zu stark: denn so wie auch die Integrationsflächen/Integrationslinien/Integranden  $f(\mathbf{x})$  für die stationäre Phasenapproximation nicht allzu stark gekrümmt sein oder variieren dürfen, darf auch dieser Abstand nicht zu stark über benachbarte Sekundärquellenpositionen  $\mathbf{x}$  variieren.

### 2.5D WFS erfordert in der Signalverarbeitung:

- einen Hochpass  $\sqrt{ik}$  mit 3dB/Okt bis zur räumlichen Aliasingfrequenz, um die geringeren Amplituden der weniger konstruktiven Überlagerung hoher Frequenzen am Hörort auszugleichen
- pro Lautsprecher ein Gewicht  $\sqrt{\frac{r_1 r_2}{r}}$  zur Krümmungsanpassung: je kürzer die Teilstrecken  $r_1$  und  $r_2$  sind, desto leiser muss der Lautsprecher werden; als Teil des Linienintegrals ergeben kurze Teilstrecken anderenfalls ein Nahfeld, das lauter wäre als das Nahfeld des Flächenintegrals
- eine Richtungsselektion  $2\max\{\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{x}_0\mathbf{x}_r}^T \mathbf{n}, 0\}$ , die Linienanteile mit korrekt orientierter Liniensenkrechten begünstigt (Kosinus von Winkel zwischen Vektor von Primärquelle zu Sekundärquelle und der Liniensenkrechten)
- die Ausbreitung von der Primärquelle hin zur Sekundärquelle der Integrationslinie  $G(r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0})$ , also eine Verzögerung und Dämpfung zu jedem Lautsprecher hin

## 5 Beispiele für 2.5D-Korrektur bei WFS mit einer Lautsprecherlinie

Danke an Lukas Göllés für diesen Abschnitt; siehe auch Gergely Firtha <http://hdl.handle.net/10890/13177>. Wenn wir die 2.5D Wellenfeldsynthese für auf eine Linie von Sekundärquellen anwenden wollen, benötigen wir eine Referenzkurve, damit wir den Abstand  $r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_r}$  ersetzen können.

**Referenzkreis:** Im einfachsten Fall nehmen wir einen Kreis, dessen Mittelpunkt die Primärquelle bildet, an. Zusätzlich fordern wir, dass die Linie der Sekundärquellen auf der  $y$ -Achse, d.h.  $x_y = 0$ , liegt. Wir können den Radius  $R$  des Referenzkreises als Summe der beiden Abstände ausdrücken und als Konstante ansetzen

$$r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_r} + r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0} = r_{\mathbf{x}_0\mathbf{x}_r} = R \quad (18)$$

und in den Wurzelausdruck aus Gleichung (17) einsetzen,

$$\sqrt{\frac{r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_r} r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}}{r_{\mathbf{x}_0\mathbf{x}_r}}} = \sqrt{\frac{r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_r}}{R}} \sqrt{r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}} = \sqrt{1 - \frac{r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}}{R}} \sqrt{r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}}. \quad (19)$$

Den Ausdruck der Normalprojektion können wir ebenso ersetzen,

$$\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{x}_0\mathbf{x}_r}^T \mathbf{n} = \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{x}_0\mathbf{x}}^T \mathbf{n} = -\frac{x_{y,0}}{r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}} \quad (20)$$

also die  $y$ -Komponente der Position der Primärquelle. Daher ergibt sich für die Treiberfunktion

$$D = \sqrt{2\pi i k} \sqrt{\frac{r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_r} r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}}{r_{\mathbf{x}_0\mathbf{x}_r}}} 2\max\{\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{x}_0\mathbf{x}_r}^T \mathbf{n}, 0\} G(r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}) \quad (21)$$

$$= -2 \frac{x_{y,0}}{r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}} \sqrt{2\pi i k} \sqrt{1 - \frac{r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}}{R}} \sqrt{r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}} G(r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}) \quad (22)$$

$$= -x_{y,0} \sqrt{\frac{i k}{2\pi}} \sqrt{1 - \frac{r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}}{R}} \frac{e^{-i k r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}}}{r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}^{1.5}}. \quad (23)$$

Darin ist  $-x_{y,0} \sqrt{\frac{i k}{2\pi}}$  ein gemeinsamer Skalierfaktor/Filter aller Sekundärquellen.

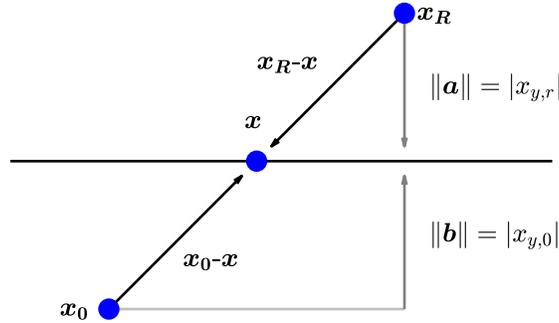


Abbildung 2: Strahlensatz über das konstante Verhältnis der beiden Teilabschnitte aller Geraden zwischen den drei  $x$ -parallelen Geraden an den  $y$ -Koordinaten  $x_{y,0}$ ,  $x_y$ ,  $x_{y,r}$ .

**Referenzlinie:** Eine weitere einfache Möglichkeit bietet eine Referenzlinie, die parallel zur Sekundärquellenlinie verläuft. Der Strahlensatz für die zwei Teilabschnitte aller Geraden zwischen drei parallelen Geraden liefert ein konstantes Verhältnis, das in unserem Fall nur vom Parallelabstand in  $y$  abhängt, was den Wurzelausdruck vereinfacht

$$\sqrt{\frac{r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_r}}{r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_r} + r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}}} \sqrt{r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}} = \sqrt{\frac{|x_{y,r}|}{|x_{y,r}| + |x_{y,0}|}} \sqrt{r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}}. \quad (24)$$

Damit ergibt sich die Treiberfunktion

$$D = -x_{y,0} \sqrt{\frac{|x_{y,r}|}{|x_{y,r}| + |x_{y,0}|}} \sqrt{\frac{i k}{2\pi}} \frac{e^{-i k r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}}}{r_{\mathbf{x}\mathbf{x}_0}^{1.5}}. \quad (25)$$

Darin ist  $-x_{y,0} \sqrt{\frac{|x_{y,r}|}{|x_{y,r}| + |x_{y,0}|}} \sqrt{\frac{i k}{2\pi}}$  ein gemeinsamer Skalierfaktor/Filter aller Sekundärquellen.