

Diplomarbeit

Simulation und Entwurf eines Messrohres zur Mikrofonvermessung

Wolfgang Nemitz

eingereicht an der Universität für Musik und darstellende Kunst Graz im Juni 2010

Betreuer:

DI Dr. Franz Zotter (IEM)

DI Holger Hiebel (NXP)

Beurteiler:

O.Univ.-Prof. Mag. DI Dr. Robert Höldrich



institut für elektronische musik und akustik





Erklärung

Hiermit bestätige ich, dass mir der *Leitfaden für schriftliche Arbeiten an der KUG* bekannt ist und ich diese Richtlinien eingehalten habe.

Graz, den

.....
Unterschrift der Verfasserin / des Verfassers

Zusammenfassung

Simulation und Entwurf eines Messrohres zur Mikrofonvermessung

In Zusammenarbeit mit der Firma NXP wurde die Dimensionierung eines optimalen Messrohres erarbeitet. Eine umfassende Literaturstudie über wissenschaftliche Arbeiten zur Wellenausbreitung in Messrohren dient als Grundlage für die Beschreibung des Wellenfeldes im Rohr. Neben der Messung des Freifeldfrequenzgangs sollen insbesondere hohe Schalldruckpegel im Messrohr erreicht werden können, um die nichtlinearen Eigenschaften des Messmikrofons zu messen. Die effektiven Rohrparameter wie Durchmesser und Länge werden ebenso berücksichtigt wie die Wahl eines geeigneten Lautsprechers als Schallquelle. Damit es sich um eine Freifeldmessung handelt, wird bei der Dimensionierung vor allem auf ebene Wellenausbreitung ohne das Auftreten störender Reflexionen im Rohr geachtet. Desweiteren werden neben verminderten Störeinflüssen und einer kompakten Ausdehnung die Grenzen des gewählten Lautsprechers, wie maximaler Schalldruckpegel und Membranauslenkung, als zusätzliche Parameter betrachtet. Die Diplomarbeit beschreibt Methoden, mit denen die geeigneten Positionen für die Öffnungen am Messrohr ermittelt werden können. Aus der während der Arbeit entstandenen Simulation lassen sich günstige Entwurfparameter ablesen, die zur Anfertigung einer groben Konstruktionskizze für MEMS-Mikrofone verwendet wurden.

Anhand eines vorliegenden Messrohres wird das unter Einsatz zylindrischer Lösungen der Wellengleichung entstandene Modell überprüft. Die exemplarischen Messungen dienen zur groben Verifikation der Simulationsergebnisse mit unterschiedlichen Rohrlängen, -abschlüssen und Messpositionen. Obwohl die physikalischen Messungen nicht deckungsgleich mit den simulierten Ergebnissen sind, zeigt sich trotzdem, dass mit dem vorgeschlagenen Modell grundsätzliche Problembereiche in Messrohren abgebildet werden.

Abstract

Simulation and design of a measurement tube for microphones

In collaboration with the company NXP, the ideal dimensioning of a measurement tube is developed according to existing literature on wave propagation in tubes. The research goals are the measurement of the free field frequency response and a desired maximum sound pressure level for measuring nonlinear characteristics of microphones. The actual parameters of the tube, such as diameter and length, are considered as well as the selection of the appropriate loudspeaker to be used as sound source. As to provide a proper setting for free field measurements, the design parameters should provide plane wave propagation without interfering reflections. Further design goals for the measurement tube are to reduce noise disturbances and a measurement facility of compact extension. Moreover, the limiting factors of the loudspeaker, such as maximum sound pressure level and membrane displacement, shall be taken into account. The thesis shows methods suitable for simulating optimal positions for the holes mounting the microphones. Using the simulation tools developed in this work, a conceptual design of a measurement-tube is presented that is suitable for measuring MEMS microphones.

The theoretical results using cylindrical solutions of the wave equation are examined using the dimensions of an existing tube. This allows to use example measurements to roughly verify the simulation result with different tube lengths, endings, and measurement positions. Although the physical measurements are not congruent with the simulation results, the suggested simulation model is capable of demonstrating fundamental issues depending on the design parameters.



Diese Diplomarbeit ist zur Erlangung des akademischen Grades *Diplomingenieur* im Rahmen des Studiums *Elektrotechnik-Toningenieur* entstanden. Dieses interuniversitäre Studium der *Universität für Musik und darstellenden Kunst Graz* und der *Technischen Universität Graz* basiert hauptsächlich auf Elektrotechnik, Akustik und Signalverarbeitung, mit Bezug auf informationstechnische Anwendungen und Audiotechnik. Durch die Ausbildung sowohl in technischen als auch in musikalischen Fachgebieten wird die Fähigkeit zu kritischem und analytischem Denken in verschiedenen Systemen vermittelt. Dadurch wird gelehrt, sich in so verschiedenen gesellschaftlichen Kontexten wie der Kunst und der Technik sicher zu bewegen und eine zielgruppengerechte Kommunikation an der Schnittstelle von Wissenschaft und Kunst zu führen.

Diese Arbeit ist in Zusammenarbeit mit dem *Institut für Elektronische Musik und Akustik* und der Firma *NXP* entstanden. Die Rechte liegen bis zum 21.12.2010 bei der Firma *NXP*. Bis dahin bedarf jegliches Zitat der Genehmigung von *NXP*.



Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	3
1.2	Messungen am Impedanzmessrohr	3
2	Modellierung eines zylindrischen Messrohres	6
2.1	Lösen der homogenen Wellengleichung (ohne Randbedingungen)	6
2.2	Lösungen zur Beschreibung für das zylindrische Messrohr	11
2.2.1	Quellenfreiheit im inneren eines zylindrischen Bereiches	12
2.2.2	Randbedingung einer schallharten zylindrischen Rohrwand	12
2.2.3	Annahme von rotationssymmetrischen Feldern	13
2.2.4	Gesamtlösung	15
2.3	Ebene und radiale Wellenausbreitung	15
2.4	Formulierung einer konphas schwingenden Kolbenmembran als Randwert- aufgabe	19
2.5	Frequenzgang des Schalldruckes an einem Punkt im zylindrischen Messrohr	22
2.6	Impedanzbedingung an beiden Rohrenden (rückgekoppelter Fall)	23
2.7	Elektroakustisches Modell für Kolbenmembran / Lautsprecher	25
2.7.1	Mechanisch auf Membran wirkende akustische Strahlungsimpedanz	26
2.7.2	Rein mechanische Impedanz der Membran und deren Aufhängung	27
2.7.3	Impedanz der elektrischen Komponenten	28
2.7.4	Elektrische Impedanz und Zusammenhang zwischen Membran- schnelle und Eingangsspannung	28
2.7.5	Schalldruckpegel im Messrohr	29
2.7.6	Membranauslenkung als physikalische Grenze	30
2.8	Simulation des Schallfeldes im Rohr	31
3	Fallstudie und Vergleich mit Messungen an einem Impedanzrohr	33
3.1	Nutzung bei voller Länge	34
3.2	Einfluss des Abschlusses	37
3.3	Einfluss der Messposition	40

3.4	Einfluss der Rohrlänge	42
4	Entwurf eines Messrohres zur Messung von Freifeld-Mikrofonfrequenzgängen mit hohen Schalldruckpegeln	45
4.1	Dimensionen	45
4.2	Lautsprecher	47
4.3	Equipment	51
5	Zusammenfassung und Ausblick	54
5.1	Zusammenfassung	54
5.2	Ausblick	54
6	Danksagung	56
A	Anhang A - Herleitungen	57
A.1	Herleitung der Wellengleichung	57
A.2	Zylinderkoordinaten	61
A.3	Radialer Zusammenhang zwischen Druck und Schnelle	63
A.4	Closure Equation	63
A.5	Ausbreitungsterm im eingeschwungenen Zustand	65
A.6	Dynamischer Wandler	66
A.7	Umrechnung mechanischer Elemente in elektrische beim FI-Wandler	68
B	Anhang B - Datenblätter	70
B.1	Datenblatt des <i>Visaton W 100 S</i>	71
B.2	Datenblatt des ND1424BT von <i>eighteensound</i>	73
B.3	Datenblatt des ND1460 von <i>eighteensound</i>	75
B.4	Bestelldaten des Messrohres	77
C	Anhang C - Vergleichsmessungen	80
C.1	Länge 41cm, mit Absorber	80
C.2	Schallharter Abschluss	83
	Literatur	85

1 Einleitung

Freifeldfrequenzgänge von Mikrofonen lassen sich idealerweise mit einem Lautsprecher als Quelle im reflexionsarmen Raum messen. Zur Bestimmung des Frequenzverhaltens des Messlautsprechers und seiner Ansteuerung wird die Messung üblicherweise mit einem Referenzmikrofon an der selben Stelle wiederholt. Der Frequenzgang des Referenzmikrofons ist dabei entweder bekannt oder möglichst konstant. Damit kann die zweite Messung eingesetzt werden, um jegliches Frequenzverhalten, das nicht Teil des geprüften Mikrofonen ist, zu eliminieren. Beide Messungen werden in ausreichendem Abstand zum Lautsprecher durchgeführt, um eine möglichst ungekrümmt eintreffende Wellenfront am Mikrofon zu erhalten, die einer ebenen Welle entspricht. Nachteile dieser Methode sind der benötigte Platzaufwand und die kostenintensive Konstruktion eines reflexionsarmen Raumes. Auch in aufwändig konstruierten Messräumen können unzureichend bedämpfte Reflexionen auftreten. Diese Reflexionen können zumindest zeitlich genügend getrennt werden, wenn reflektierende Flächen möglichst weit entfernt sind. Dies erlaubt, dass die zeitlich getrennten Ereignisse in den Messungen durch Fensterung bestimmt werden können, benötigt aber große Raumdimensionen. Allerdings erreichen einkanalige Messlautsprecher in gewöhnlichen Räumen nur schwer derart hohe Schalldrücke, wie sie zur Vermessung der nichtlinearen Eigenschaften von Mikrofonen benötigt werden. Tatsächlich ist die Last, die ein freies Schallfeld der Membranschwingung bei tiefen Frequenzen entgegengesetzt so klein, dass die Lautsprechermembran sehr weit ausgelenkt werden muss, um genügend Schalleistung abzustrahlen.

Eine weitere Methode, die derzeit auch von Firma *NXP* verwendet wird, ist die Messung in der Druckkammer. Dabei wird das Prüflingsmikrofon in einem allseitig abgeschlossenen Raum mit glatten, reflektierenden Wänden eingesetzt. Dieser Raum ist im Vergleich zur Wellenlänge klein, damit darin ein Wechseldruck im quasistationären Zustand entstehen kann. Als Referenzübertragungsfunktion wird entweder der gemessene Frequenzgang eines Referenzmikrofons oder die Druckkammereichkurve verwendet.

Motivation dieser Arbeit ist, ein Messrohr als weitere Umgebung zur Vermessung von Freifeldfrequenzgängen von MEMS-Mikrofonen zu entwickeln. Ebene Wellenausbreitung

sollte sich in einem Messrohr zumindest in einem beschränkten Frequenzbereich erzeugen lassen, wobei ein funktionierender Messbereich von ungefähr 100Hz bis 10kHz gewünscht ist. Ferner sollten sich bei Verwendung eines Horntriebers als Schallquelle hohe Schalldrücke mit geringem Klirrfaktor erzeugen lassen. Als Ziel wurde von *NXP* vorgegeben, zumindest bei 200Hz einen Schalldruckpegel von 140dB zu erreichen. Ein Messrohr ist wegen der Trennung von der umgebenden Luft einigermaßen resistent gegenüber Umgebungsgläuschen und lässt sich vergleichsweise kostengünstig produzieren, wobei die Abmessungen einen Einsatz in der Produktion erlauben. Damit besteht die Möglichkeit, statt Stichproben jedes gefertigte Mikrofon maschinell zu vermessen und dadurch eine Fertigung mit gleichbleibender Qualität zu erreichen. Auf Basis der theoretischen Überlegungen sollte eine Konstruktionskizze für ein Messrohr erstellt und ein geeigneter Lautsprecher ausgewählt werden, wohingegen das weitere Messequipment, wie Referenzmikrofon, Verstärker, Vorverstärker, Audiokarte und Mess-PC, nicht Teil dieser Arbeit ist.

MEMS ist die Abkürzung für *Microelectromechanical Systems* und beschreibt grundsätzlich Bauteile und Geräte, deren Einzelkomponenten als System zusammenwirken und Abmessungen im Mikrometerbereich haben. Frühere Mikrosysteme basierten auf Halbleitertechnik, die üblicherweise auf Silizium aufgebracht wurde, wogegen moderne MEMS auch preiswert aus Kunststoffen produziert werden können und die Möglichkeiten der Halbleiter-Werkstoffe um mechanische, optische und biologische Komponenten und Funktionen erweitert wurden [Wik10a]. *NXP* entwickelt unter anderem Mikrofone auf MEMS-Basis. In Abbildung 1 ist ein solches Mikrofon zu sehen. Die Abmessungen betragen 4x3x1mm, so dass eine typische Anwendung im Bereich der Mobiltelefone liegt.

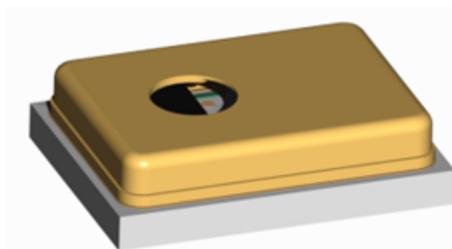


Abbildung 1: Mikrofon auf MEMS-Basis der Firma *NXP*.

In Kapitel 2 werden die theoretischen Betrachtungen erläutert, deren Resultate in eine

Simulation in MATLAB einfließen. Kapitel 3 beinhaltet die praktischen Messungen in einem fertigen Messrohr und Untersuchungen verschiedener Einflüsse, wie Abschluss, Rohrlänge und Messposition, auf das Messergebnis. In Kapitel 4 werden die Folgerungen für die Konstruktion des Messrohres für MEMS-Mikrofone angeführt.

1.1 Motivation

Für das Messen des Freifeldfrequenzgangs eines Mikrofons wird es idealerweise in ein ebenes Wellenfeld mit konstantem Schalldruckpegel gestellt. Je nach Ausrichtung des Mikrofons kann die frequenzabhängige Empfindlichkeit aus verschiedenen Richtungen ermittelt werden, wie in Abbildung 2 gezeigt wird. Die Motivation für die Betrachtung eines Messrohres besteht aus dem Gedanken, ein an sich unendlich großes ebenes Wellenfeld durch ein Rohr einzugrenzen. Wenn es gelingt, wird ein kompakter Messaufbau erreicht. Dabei ist auf die Vermeidung von Reflexionen jeder Art zu achten, damit das ebene Wellenfeld durch das Rohr nicht beeinflusst wird.

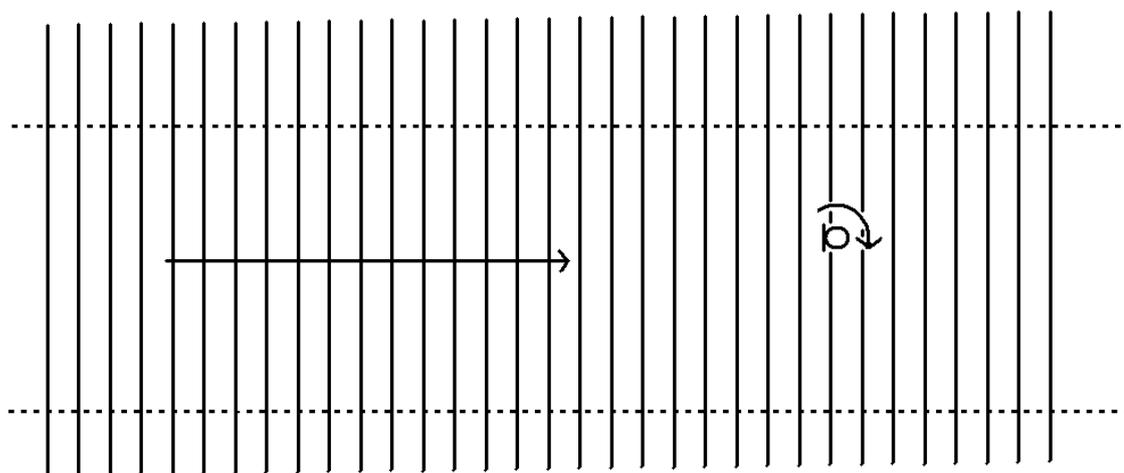


Abbildung 2: Messung des Freifeldfrequenzgangs eines Mikrofons im ebenen Wellenfeld.

1.2 Messungen am Impedanzmessrohr

Freundlicherweise wurde vom *Institut für Breitbandkommunikation* der Technischen Universität Graz das in [Bru02] beschriebene Impedanzmessrohr für Messungen zur Verfügung gestellt, welches in Abbildung 3 abgebildet ist. Es handelt sich um ein zylinderförmig-

ges Messrohr aus Stahl mit einem Innendurchmesser von 10cm und einer Wandstärke von 7,5mm. Im Abstand von 11,5cm, 21,5cm und 31,5cm zur Schallquelle befinden sich Löcher mit Mikrofonhalterungen für das *AKG C480B*, mit dem die Messungen durchgeführt wurden. Zwar handelt es sich bei diesem Mikrofon um ein Studiomikrofon, das eigentlich nicht für Messzwecke entwickelt wurde, jedoch passt es ganz genau in die maßgefertigte Halterung und liefert zumindest bei der 2p Messmethode respektable Ergebnisse [Bru02]. Durch einen verschiebbaren Stempel am Ende des Rohres lässt sich die Länge von 41cm bis 74cm einstellen. Auf diesen Stempel können verschiedene Materialien aufgebracht werden, so dass eine Messung mit schallhartem Abschluss und mit gedämpften Reflexionen möglich ist. Als Lautsprecher wurde der in ein Gehäuse eingebaute *Visaton W 100 S* benutzt, der von einem HiFi-Endverstärker (*Parasound HCA-800II*) betrieben wird. Die Daten des Lautsprechers finden sich im Anhang B.1. Als Vorverstärker für das Mikrofon und als AD- und DA-Umsetzer wurde ein *Fireface 800* von *RME*, als Abspiel-, Aufnahme- und Analysetool *MATLAB* unter *Windows XP* verwendet. Alle Messungen wurden mit einem exponentiellen Sweep durchgeführt.



Abbildung 3: Das Impedanzmessrohr [Bru02].

Eine erste Messung ist in Abbildung 4 zu sehen. Das Rohr wurde mit dem Stempel bei einer Länge von 41cm schallhart abgeschlossen und die Messposition bei 31,5cm verwendet. Die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems erhält man durch Division der Fourier-Transformierten des Ausgangssignals durch die Fourier-Transformierte des Ein-

gangssignals. Die Übertragungsfunktion nennt man Frequenzgang, dessen Betrag der dargestellte Amplitudengang ist. Darin überlagern sich in diesem Fall neben dem Amplitudengang des Impedanzmessrohres die Amplitudengänge der Kabel, des Verstärkers und des Mikrofons. Idealerweise wünscht man sich einen konstanten Amplitudengang des Messsystems, damit man eindeutige Aussagen über das Messobjekt treffen kann. Mit glatten, nicht konstanten Amplitudengängen lassen sich noch ganz gute Ergebnisse erzielen, mit steigender Welligkeit, wie beim hier ermittelten Frequenzgang, ist es schwierig, vertrauenswürdige Messungen durchzuführen.

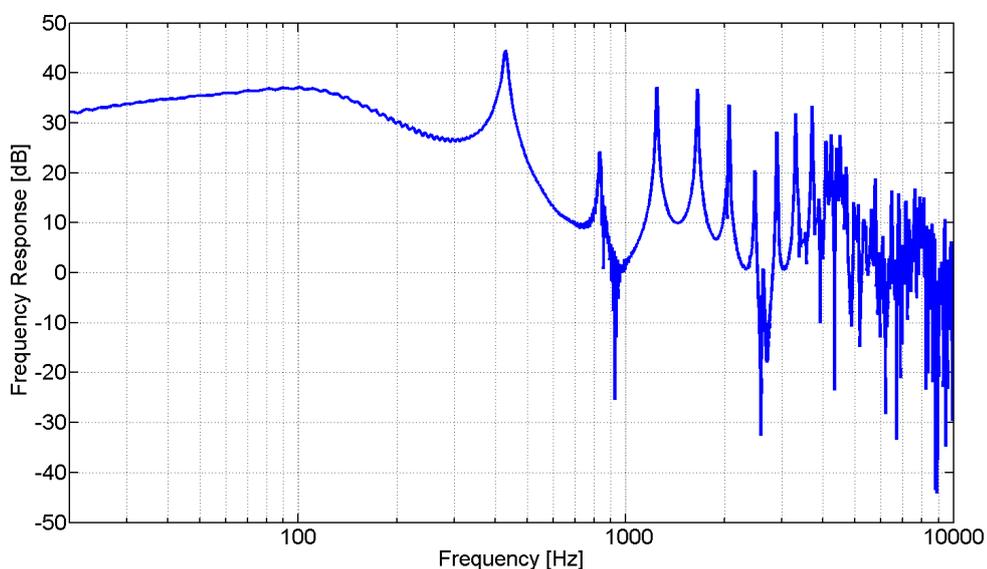


Abbildung 4: gemessener Frequenzgang im Impedanzrohr (Länge 41cm, Radius 5cm, Abstand Mikrofon zu Membran 31,5cm, schallhart abgeschlossen).

Welche Rohreigenschaften führen zu solch welligen Frequenzgängen? Wie kann man die Dimension des Rohres bestimmen, um einen glatten, wenn möglich konstanten Verlauf zu erreichen? Handelt es sich beim entstehenden Schallfeld überhaupt noch um ebene Wellen? Um diese Fragen zu beantworten, ist es notwendig sich mit der Wellenausbreitung im Zylinderrohr und den durch das Rohr entstehenden Randbedingungen zu beschäftigen. Im folgenden Kapitel wird auf die hierzu benötigte Theorie eingegangen, um diese Fragen zu beantworten.

2 Modellierung eines zylindrischen Messrohres

Die Helmholtzgleichung, siehe Anhang A.1, wird im Zylinderkoordinatensystem gelöst und mittels Randbedingungen für ein zylinderförmiges Rohr vereinfacht. Daraus lassen sich der Frequenzgang und die mechanisch wirksame akustische Impedanz des Rohres an der Membran bestimmen. Anhand von Thiele/Small-Parametern wird das Modell eines Lautsprecher als Schallquelle an das Rohr angeschlossen, woraus sich die Membranschnelle, der Schalldruckpegel im Rohr und die Membranauslenkung in Abhängigkeit von der angelegten Spannung bestimmen lassen.

2.1 Lösen der homogenen Wellengleichung (ohne Randbedingungen)

Die Helmholtzgleichung

$$(\nabla^2 - k^2)p = 0$$

wird zunächst allgemein im Raum gelöst. Für die Geometrie des vorliegenden Problems bietet sich die Lösung im Zylinderkoordinatensystem an, welches im Anhang A.2 erläutert wird.

Vorerst ohne Betrachtung von Randbedingungen, lässt sich zum Lösen der Helmholtzgleichung der sogenannte Produktansatz als Separationsansatz anwenden [Wil99], [Zio95]. Dabei geht man davon aus, dass sich die Lösung einer Differentialgleichung als ein Produkt von Funktionen darstellen lässt, die jeweils von nur einer der vorkommenden Variablen abhängig sind. Hieraus folgt für den Schalldruck:

$$p(r, \phi, z) = R(r) \cdot \Phi(\phi) \cdot Z(z).$$

Setzt man dies in die Helmholtzgleichung ein und dividiert durch $(R(r) \cdot \Phi(\phi) \cdot Z(z))$, erhält man für die Wellengleichung:

$$\left(\frac{1}{R(r)} \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{rR(r)} \frac{dR(r)}{dr} + \frac{1}{r^2 \Phi(\phi)} \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} \right) + \left(\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} \right) = k^2.$$

Da die Funktionen $R(r)$, $\Phi(\phi)$ und $Z(z)$ nur von jeweils einer Variablen abhängig sind, wurden die partiellen Ableitungen durch totale Ableitungen ersetzt. Zu beachten ist, dass der erste Klammerausdruck auf der linken Seite der Gleichung nur von r und ϕ und der zweite nur von z abhängen und diese Variablen untereinander unabhängig sind, weswegen jeder dieser Terme einer Konstanten entsprechen muss. Diese Konstanten werden folgendermaßen festgelegt [Wil99]:

$$\frac{1}{R(r)} \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{rR(r)} \frac{dR(r)}{dr} + \frac{1}{r^2\Phi(\phi)} \frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2} \equiv -k_r^2. \quad (1)$$

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} \equiv -k_z^2$$

Als charakteristische Gleichung, die die Wellenausbreitung der einzelnen Richtungen beschreibt, ergibt sich daraus unmittelbar

$$k^2 = k_r^2 + k_z^2. \quad (2)$$

Lösung in z

Der für z abhängige Ausdruck in (1) ist eine gewöhnliche homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, deren allgemeine Lösung sich als

$$Z(z) = Z_1 e^{jk_z z} + Z_2 e^{-jk_z z}$$

ergibt, wobei Z_1 und Z_2 beliebige Konstanten sind [Wil99], [Zio95].

Lösung in ϕ

Der untere Ausdruck in (1) lässt sich so umschreiben, dass die linke Seite der Gleichung nur von r und die rechte Seite nur von ϕ abhängen:

$$\frac{r^2}{R(r)} \left(\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr} \right) + k_r^2 r^2 = -\frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2}. \quad (3)$$

Da diese Variablen unabhängig voneinander sind, müssen auch diese Terme konstant sein. Für die rechte Seite wird

$$\frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2} \equiv -n^2 \quad (4)$$

definiert, so dass sich wieder eine gewöhnliche homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten ergibt, deren allgemeine Lösung sich als

$$\Phi(\phi) = \Phi_1 \cos(n\phi) + \Phi_2 \sin(n\phi)$$

ausdrücken lässt, wobei Φ_1 und Φ_2 beliebige Konstanten sind [Wil99], [Zio95].

Der Winkel ϕ in den Zylinderkoordinaten geht von 0 bis 2π , daher gilt

$$\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi),$$

und für die Lösung der Differentialgleichung folgt daraus:

$$\Phi_1 \cos(n\phi) + \Phi_2 \sin(n\phi) = \Phi_1 \cos(n\phi + n2\pi) + \Phi_2 \sin(n\phi + n2\pi).$$

Damit diese Gleichung erfüllt werden kann, muss $n \in \mathbb{Z}$ gelten [Wil99].

Lösung in r

Mit der Lösung in ϕ lässt sich (3) umschreiben, so dass für r gilt:

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr} + \left(k_r^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R(r) = 0.$$

Diese Gleichung gehört zu den Besselschen Differentialgleichungen, die mit Bessel-Funktionen erster und zweiter Art gelöst werden. Als Lösung erhält man

$$R(r) = A_1 J_n(k_r r) + B_1 Y_n(k_r r)$$

mit J_n Bessel-Funktion 1. Art n -ter Ordnung und Y_n Bessel-Funktion 2. Art n -ter Ordnung und $A_1, B_1 \in \mathbb{C}$.

Zu beachten ist dabei, dass der Index n der Bessel-Funktionen der Separationskonstanten aus Gleichung (4) entspricht [Wil99].

Der Schalldruck in r -Richtung (z-Richtung wird die Achse des Rohres sein, die x - y -Ebene senkrecht dazu) breitet sich in Form der Bessel-Funktionen aus. Abbildung 5 zeigt diese Ausbreitung für die x - y -Ebene, wobei hier die Bessel-Funktion erster Art und nullter Ordnung dargestellt ist.

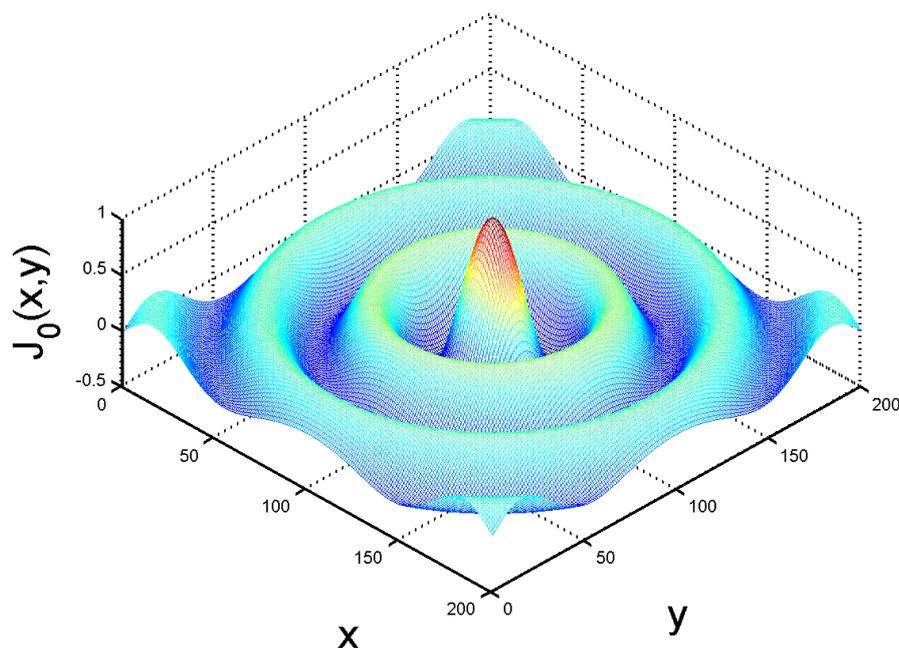


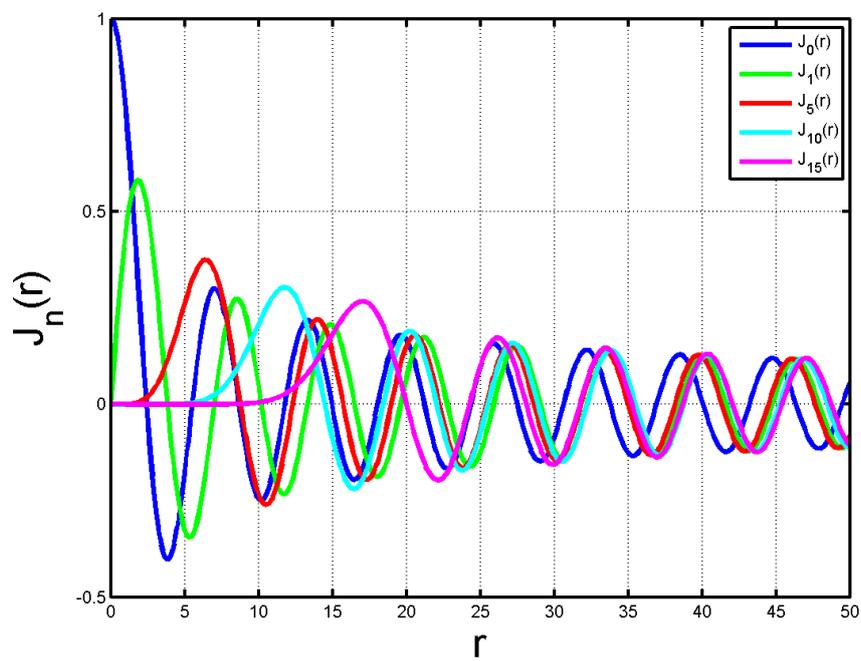
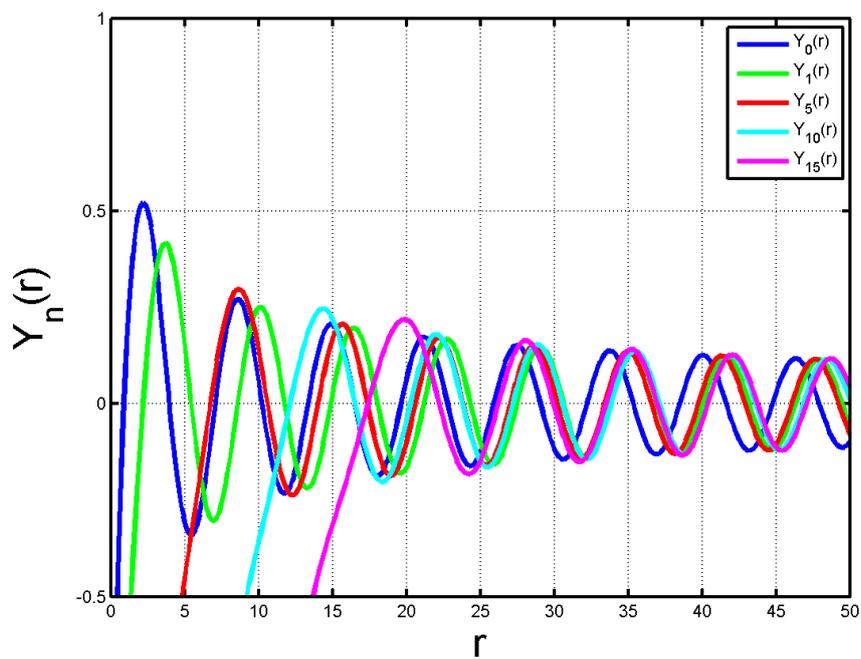
Abbildung 5: Bessel-Funktionen erster Art und nullter Ordnung ($J_0(r)$).

In Abbildung 6 sind die Bessel-Funktionen erster Art entlang der radialen Richtung dargestellt. $J_0(r)$ hat ihr Maximum bei $r = 0$, wobei $J_n(0) = 0 \quad \forall n > 0$. Für $r \rightarrow \infty$ gilt als Näherung $J_n(r) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \cos(r - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4})$ [Wil99].

Die Bessel-Funktionen zweiter Art entlang der radialen Richtung sind in Abbildung 7 gezeigt. Alle $Y_n(r)$ haben im Ursprung eine Singularität, für $r \rightarrow \infty$ gilt als Näherung $Y_n(r) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \sin(r - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4})$ [Wil99].

Zusammensetzen der homogenen Lösung (ohne Randbedingungen)

Setzt man die Einzellösungen für z , ϕ und r in den Separationsansatz ein und fasst die Konstante A_1 in den Konstanten Φ_1, Φ_2, Z_1 und Z_2 zusammen, ergibt sich als Lösung

Abbildung 6: Bessel-Funktionen erster Art ($J_n(r)$).Abbildung 7: Bessel-Funktionen zweiter Art ($Y_n(r)$).

der Helmholtzgleichung

$$p(r, \phi, z) = [A_1 J_n(k_r r) + B_1 Y_n(k_r r)] \cdot [\Phi_1 \cos(n\phi) + \Phi_2 \sin(n\phi)] \cdot [Z_1 e^{jk_z z} + Z_2 e^{-jk_z z}] \quad (5)$$

mit der charakteristischen Gleichung $k^2 = k_r^2 + k_z^2$. Damit wird ganz allgemein das Schallfeld in Zylinderkoordinaten beschrieben. Im nächsten Abschnitt geht es darum, die Randbedingungen und Symmetrieanahmen des Messrohres einzuführen.

2.2 Lösungen zur Beschreibung für das zylindrische Messrohr

Ausgehend davon, dass das zylindrische Messrohr symmetrisch um die z-Achse angeordnet ist und dessen eine Seite bei $z = 0$ und die andere bei $z = L$ liegt, so wie in Abbildung 8 dargestellt, ergeben sich daraus drei Bedingungen für das Schallfeld, die im Folgenden gezeigt werden.

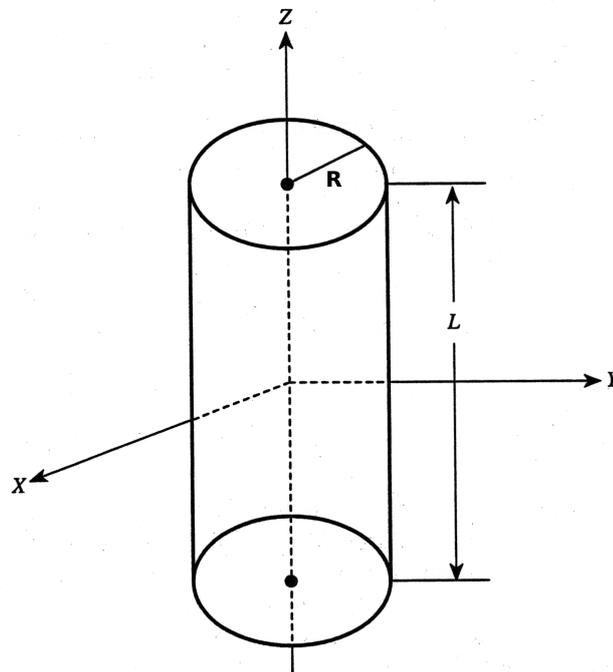


Abbildung 8: Messrohr mit Radius R und Länge L .

2.2.1 Quellenfreiheit im inneren eines zylindrischen Bereiches

Am Rohreingang, der im Ursprung des Koordinatensystems liegt, wird ein Lautsprecher als Quelle angeschlossen, dessen Membran eine Schnelle vorgibt, durch die der Schalldruck im Rohr erzeugt wird. Wie aus Abbildung 7 zu sehen ist, haben die Bessel-Funktionen zweiter Ordnung allesamt eine Singularität im Ursprung. Weil für das vorliegende innere Problem der Schalldruck im Ursprung endlich sein muss, werden alle $B_1 = 0$ gesetzt, das heißt Bessel-Funktionen zweiter Art als Lösung verworfen [Zio95], [Kem02]. Durch diese Randbedingung beschränkt sich die Wellenausbreitung in r -Richtung auf die Bessel-Funktionen erster Art.

2.2.2 Randbedingung einer schallharten zylindrischen Rohrwand

Die Rohrwände werden als unendlich steif angenommen und können daher keine Schallenergie aufnehmen. Die Komponente der Schallschnelle v normal zur Rohrwand muss daher identisch Null sein, wie in Abbildung 9 angedeutet. In Anhang A.3 wird gezeigt, dass mit v_r die Komponente des Gradienten von p normal zur Rohrwand ebenfalls Null sein muss. Daher gilt diese Forderung für die Rohrinneenseite [Zio95], [Kem02]:

$$\left. \frac{d}{dr} p(r, \phi, z) \right|_{r=R} = 0$$

Betrachtet man die bisherige Lösung der Helmholtzgleichung, sieht man, dass nur die Bessel-Funktionen von r abhängen. Daher sind nur jene Bessel-Funktionen als Lösungen für das Rohr zulässig, welche die Bedingung

$$\left. \frac{d}{dr} J_n(k_r r) \right|_{r=R} = 0$$

erfüllen. Werden alle Nullstellen durch $\alpha_{n,l}$ repräsentiert, so dass

$$J'_n(\alpha_{n,l}) = 0 \quad \text{mit} \quad n, l = 0, 1, 2, \dots,$$

so sind für die Wellenzahl im Radius nur mehr die Werte

$$k_r R = \alpha_{n,l} \quad \text{mit} \quad n, l = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\Rightarrow k_{r_{n,l}} \equiv k_r = \frac{\alpha_{n,l}}{R} \quad \text{mit} \quad n, l = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

zulässig [Zio95]. Die ersten dieser Moden sind in Abbildung 10 zu sehen.

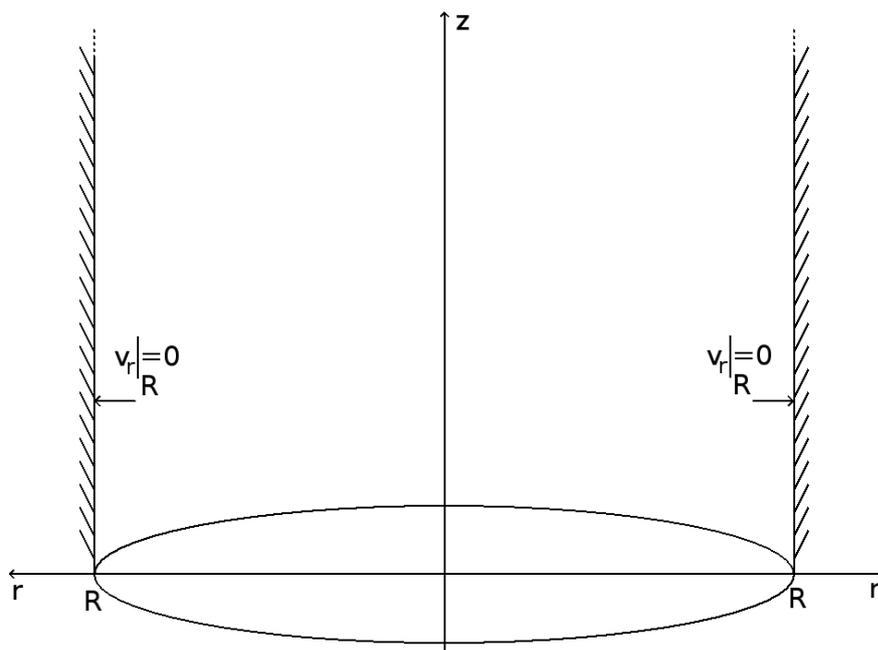


Abbildung 9: Randbedingung an der Rohrwand.

2.2.3 Annahme von rotationssymmetrischen Feldern

Es wird davon ausgegangen, dass sich im Rohr nur rotationssymmetrische Wellen um die z -Achse ausbreiten können. Die durch die Einschränkung der Wellenausbreitung in r des vorherigen Abschnitts zugelassenen Moden im Rohr werden durch die Paare (n, l) beschrieben, wobei n für die Anzahl der radialen und l für die Anzahl der kreisförmigen Knotenlinien steht. Ein Schema der ersten einfachen Moden findet sich in Abbildung 10. Zur Verdeutlichung ist die Mode $(1, 2)$ in Abbildung 11 dargestellt.

Durch die Annahme der Rotationssymmetrie des Schallfeldes werden nur die rotationssymmetrischen Moden zugelassen, welche in Abbildung 10 eingerahmt sind und durch

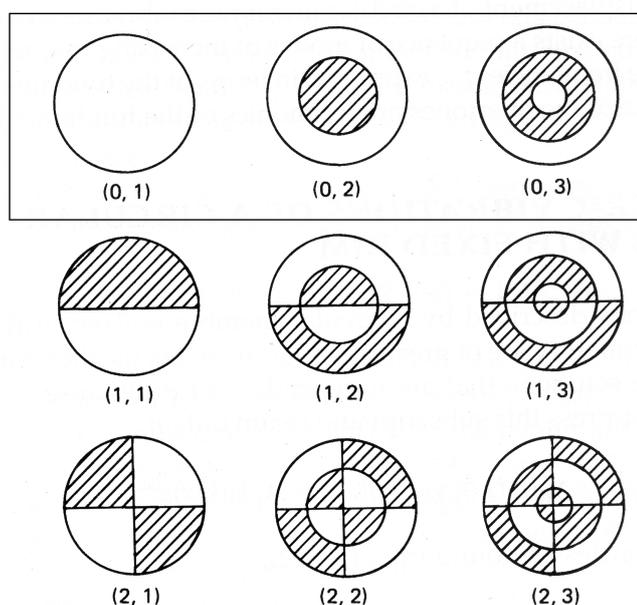


Abbildung 10: Modensymmetrien, bezeichnet durch das Paar (n, l) . Die Phase der schraffierten Flächen ist um 180° versetzt zu der Phase der nicht schraffierten Flächen. Die Flächen sind durch Knotenlinien voneinander getrennt [KFCS00].

das Paar $(0, l)$ beschrieben werden. Daher wird $n = 0$ gesetzt [KFCS00]. Daraus folgt auch, dass nicht mehr alle Bessel-Funktionen erster Art verwendet werden, sondern nur noch die eine erster Art und nullter Ordnung. Der Index n in (6) wird daher nicht immer explizit ausgeschrieben, da er keine Aussage mehr hat.

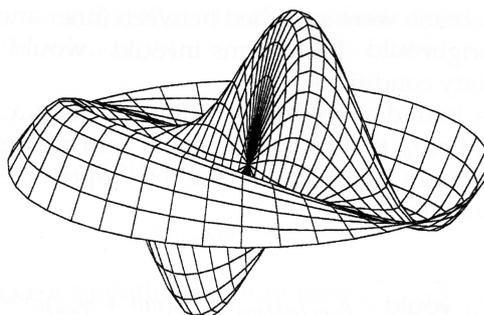


Abbildung 11: Ansicht der Mode $(1, 2)$ [KFCS00].

Durch diese Annahme ist das Schallfeld unabhängig von ϕ und in r -Richtung wird die Wellenausbreitung auf die Moden der Bessel-Funktion erster Art und erster Ordnung eingeschränkt.

2.2.4 Gesamtlösung

Setzt man die aus den Bedingungen für die Schallausbreitung im zylindrischen Rohr gewonnenen Erkenntnisse in (5) ein und fasst die Konstanten A_1, Φ_1 und Φ_2 in γ_l zusammen, so ergibt sich

$$p(r, \phi, z) = \gamma_l J_0(k_{r_l} r) \cdot [Z_1 e^{jk_z z} + Z_2 e^{-jk_z z}]. \quad (7)$$

Als Gesamtlösung im zylindrischen Rohr erhält man daraus

$$p(r, \phi, z, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \gamma_l J_0(k_{r_l} r) \cdot [Z_{1_l} e^{jk_z z} + Z_{2_l} e^{-jk_z z}] \cdot e^{j\omega t}$$

als Summe über alle Moden. Im Fall einer Schwingungsanregung gilt es, die Koeffizienten γ_l entsprechend der Randwertaufgabe zu ermitteln.

Für die Berechnungen der Nullstellen α_l sind die Zusammenhänge der Bessel-Funktionen zu beachten, denn es gilt [KFCS00], [Kem02]:

$$\frac{d}{dx} J_0(x) = -J_1(x),$$

und damit ist

$$J'_0(\alpha_l) = 0 \Leftrightarrow J_1(\alpha_l) = 0.$$

Die ersten Nullstellen der Bessel-Funktion erster Art und erster Ordnung finden sich in Tabelle 1. Sie wurden nach der Halley-Iterationsmethode, einer Erweiterung der Newton-Methode, bestimmt.

2.3 Ebene und radiale Wellenausbreitung

In diesem Kapitel wird die Wellenausbreitung genauer untersucht. Für eine sinnvolle Messung im Messrohr sollte sich das Messmikrofon im ebenen Wellenfeld befinden. Von einer ebenen Wellenausbreitung spricht man, wenn zu einem Zeitpunkt alle Raumpunkte gleichen Druckes oder gleicher Schnelle auf Ebenen liegen, die senkrecht zur Ausbrei-

l	α_l	l	α_l	l	α_l
0	0.0000	17	54.1856	34	107.5961
1	3.8317	18	57.3275	35	110.7378
2	7.0156	19	60.4695	36	113.8794
3	10.1735	20	63.6114	37	117.0211
4	13.3237	21	66.7532	38	120.1628
5	16.4706	22	69.8951	39	123.3045
6	19.6159	23	73.0369	40	126.4461
7	22.7601	24	76.1787	41	129.5878
8	25.9037	25	79.3205	42	132.7295
9	29.0468	26	82.4623	43	135.8711
10	32.1897	27	85.6040	44	139.0128
11	35.3323	28	88.7458	45	142.1544
12	38.4748	29	91.8875	46	145.2961
13	41.6171	30	95.0292	47	148.4377
14	44.7593	31	98.1710	48	151.5794
15	47.9015	32	101.3127	49	154.7210
16	51.0435	33	104.4544	50	157.8627

Tabelle 1: Die ersten Nullstellen der Bessel-Funktion J_1 .

tungsrichtung (z-Achse) stehen. Dabei hängen die Schallfeldgrößen p und v nur von der Ortskoordinate z ab.

Aus der charakteristischen Gleichung (2) gilt für die Ausbreitung in oder entgegen der z-Richtung:

$$k_z = \pm \sqrt{k^2 - k_{r_l}^2}.$$

Für $k > k_{r_l}$ ist der Wert unter der Wurzel positiv. Ausgehend davon, dass eine positive reelle Wellenzahl einer Ausbreitung in z-Richtung entspricht, sollte die positive Wurzel genommen werden. Für $k < k_{r_l}$ ist der Wert unter der Wurzel negativ, so dass die Wellenzahl k_z dieser Moden in z-Richtung imaginär wird. Man erhält in diesem Fall für die Ausbreitung in z-Richtung

$$P_l(z) = Z_1 e^{jk_z z} + Z_2 e^{-jk_z z} = Z_1 e^{-|k_z|z} + Z_2 e^{|k_z|z},$$

was einer exponentiellen Dämpfung entspricht. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit

werden die Vorzeichen deshalb üblicherweise wie folgt gewählt [Kem02]:

$$k_z = \begin{cases} -\sqrt{k^2 - k_{r_l}^2} & \text{für } k < k_{r_l}, \\ +\sqrt{k^2 - k_{r_l}^2} & \text{für } k > k_{r_l}. \end{cases}$$

So lange alle Wellenzahlen k_{r_l} mit $l > 0$ das Kriterium $k_{r_l} > k$ erfüllen, breitet sich nur die Komponente für $l = 0$ als Welle aus. Alle anderen Komponenten bei $l > 0$ sind evaneszente Wellen, die exponentiell in z ausklingen und somit ab einem Abstand zur Quelle keinen nennenswerten Einfluss auf das Schallfeld haben. Die Komponente $l = 0$ entspricht dem Fall einer ebenen Welle. Als obere Grenzfrequenz gilt daher

$$f_{OG} < \frac{c \alpha_1}{2\pi R} \approx \frac{209}{R} \quad (8)$$

mit c als der Schallgeschwindigkeit.

Die Wellenausbreitung für $f = 400\text{Hz}$ ist in Abbildung 12 zu sehen, wobei sich bei der ebenen Wellenausbreitung ($l = 0$) eine Wellenzahl von $k_z = k = 7,33$ ergibt. Für $l = 1$ ergibt sich eine Wellenzahl in z -Richtung von $k_z = \sqrt{k^2 - \alpha_1^2} = 6,25$. Die Wellenzahl hat sich verkleinert, was einer Vergrößerung der Wellenlänge entspricht. Diese Mode breitet sich in z aus, was unerwünscht ist, wenn man nur ebene Wellen erhalten möchte. Die Vergrößerung der Wellenlänge ist für die $l = 2$ Mode noch deutlicher zu sehen. In diesem Fall ergibt sich eine Wellenzahl von $k_z = 2,1$. Zu beachten ist außerdem, dass der Druckverlauf in z -Richtung der Sinusfunktion folgt, während er senkrecht zur z -Achse der Bessel-Funktion entspricht. Bei $l = 3$ wird die Wellenzahl mit $k_z = 7,05i$ komplex, weswegen die Wellen in z evaneszent sind. Für alle höheren Moden gilt nun, dass sie auch exponentiell gedämpft werden. Alle Fälle haben dieselbe Wellenzahl $k = 7,33$, nur das Verhältnis von k_z zu k_{r_l} verändert sich. Für die Berechnung dieser Druckverläufe wurde ein Rohrradius von $R = 1$ angenommen und nur die hinlaufende Welle betrachtet, das heißt Z_1 in (7) wird Null gesetzt. Stellt man sich die Überlagerung dieser Moden vor, erkennt man, dass als Gesamtdruckverlauf in diesem Fall keine ebenen Wellen entstehen.

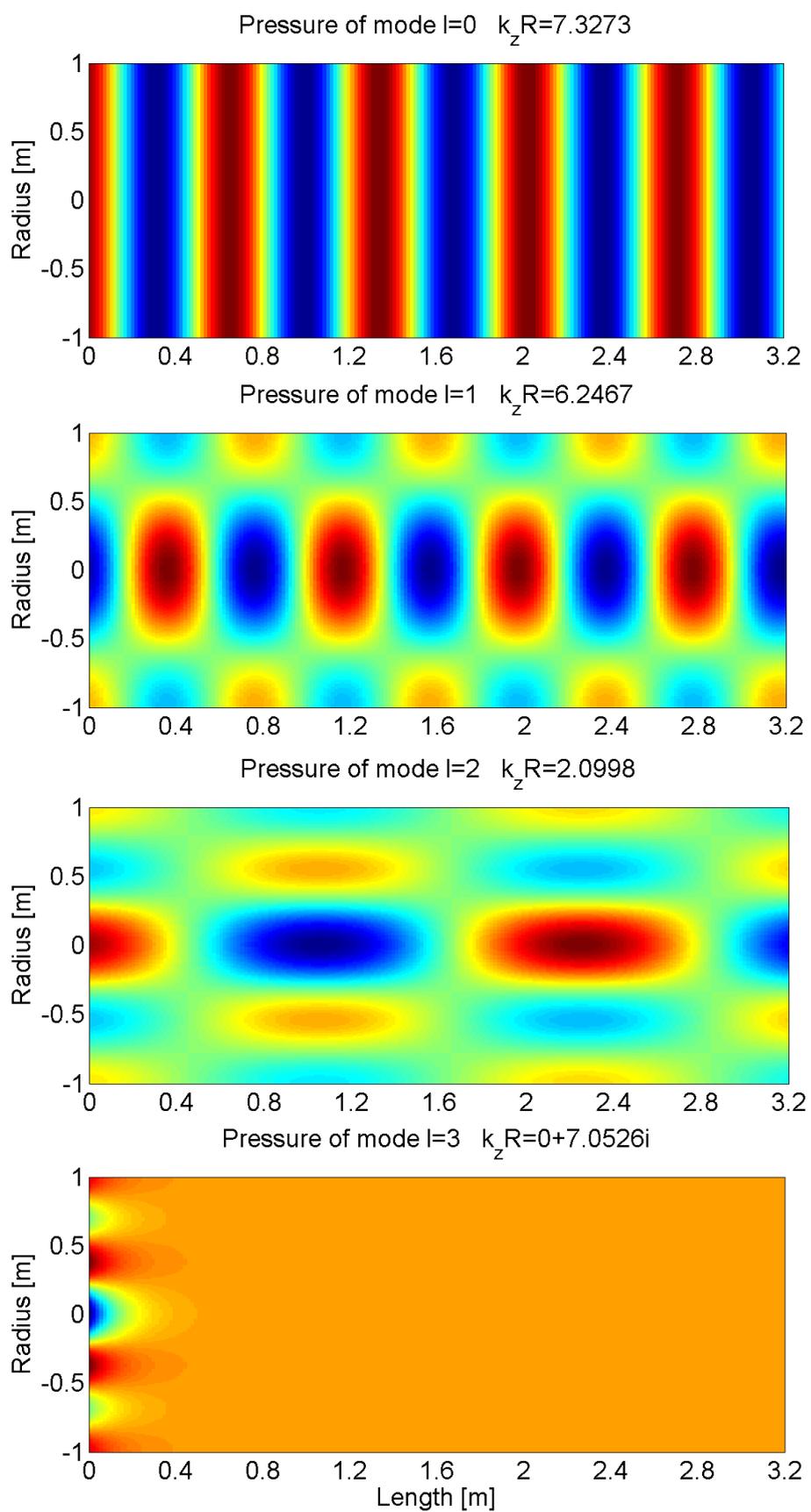


Abbildung 12: Die Moden im zylindrischen Rohr für $l = 0$ (ebene Welle), $l = 1$, $l = 2$ und $l = 3$ (evaneszente Welle).

2.4 Formulierung einer konphas schwingenden Kolbenmembran als Randwertaufgabe

Als Schallquelle soll ein Lautsprecher an die eine Seite ($z = 0$) des Rohres angeschlossen werden, dessen schwingende Membran den Schalldruck im Rohr erzeugt, so wie es in Abbildung 13 dargestellt ist. In der Simulation wird die schwingende Membran zunächst durch einen scharf berandeten Kolben nachgebildet, wie in Abbildung 14a skizziert. Aus der Schwingung dieses Kolbens kann der entstehende Schalldruck abgeschätzt werden. Später werden die Konturen des Kolbens abgerundet, um die weiche Fixierung der Membran am Rand nachzubilden, wie in Abbildung 15a gezeigt. In beiden Fällen wird davon ausgegangen, dass der Membranradius R_M gleich groß oder kleiner als der Rohrradius R ist.



Abbildung 13: Das Messrohr mit Lautsprecher als Quelle.

Für die folgende Überlegung wird von einem unendlich langen Rohr ausgegangen, so dass es keine rücklaufende Welle gibt. Diese Randwertaufgabe ermöglicht ähnlich zur akustischen Holographie, aus bekannten Feldverteilungen in Amplitude und Phase an bestimmten Oberflächen die Feldverteilungen an anderen Stellen zu berechnen. Daher kann mit dem entsprechenden Verschiebungsterm, ausgehend vom bekannten Schalldruck und bekannter Schnelle an der Membran bei $z = 0$, auf den Schalldruck und die Schnelle bei $z = a$ zurückgerechnet werden, so dass gilt: [Zot08]

$$p(r, \phi, a) = p(r, \phi, z) \Big|_{z=0} e^{-jk_z z} \quad \text{und} \quad v(r, \phi, a) = v(r, \phi, z) \Big|_{z=0} e^{-jk_z z}.$$

Aus der Eulerschen Bewegungsgleichung folgt für die Schnelle an der Membran

$$v \Big|_{z=0} = \sum_{l=0}^{\infty} \gamma_l J_0(k_{r_l} r).$$

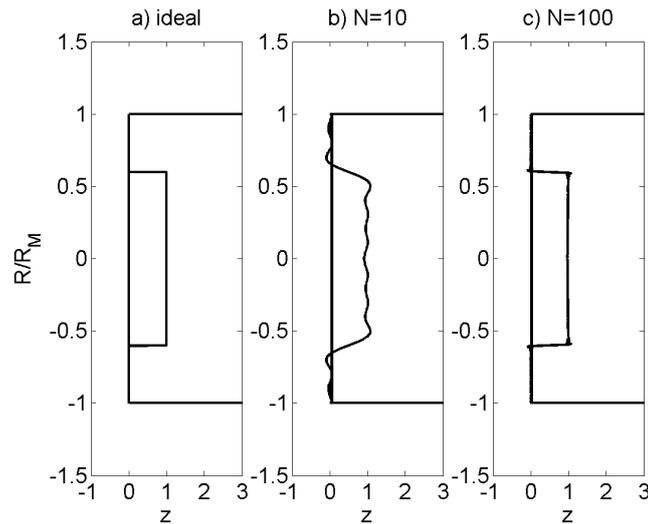


Abbildung 14: Der Beginn des Messrohres mit a) idealem Rechteck und b), c) aus überlagerten Bessel-Funktionen zusammengesetztem Rechteck als idealisierte Membran für $v_z = 1$.

Als Schnelle soll zunächst mit Hilfe von Überlagerungen der Bessel-Funktion ein Rechteck mit den Kantenlängen *Membranradius* $\times v_z$ beschrieben werden, wobei v_z die Komponente der Schnelle in z-Richtung ist. Die vorgegebene Funktion

$$g(r) = v_z (1 - u(r - R_M))$$

mit $u(r)$ als Einheitssprungfunktion erfüllt diese Vorgaben für ein Rechteck. Aus der Überlagerung

$$g(r) \stackrel{!}{=} \int_0^{\infty} \gamma_l J_0(r k_{r_l}) dl$$

lassen sich die unbekanntenen Koeffizienten γ_l aus (7) mit Hilfe der *closure equation*, der Orthogonalitätsbeziehung zwischen Bessel-Funktionen für unendlichen Integrationsbereich, als

$$\gamma_l = k_{r_l} \int_0^{\infty} J_0(k_{r_l} r) g(r) r dr \quad (9)$$

berechnen, wie im Anhang A.4 gezeigt.

Mit diesen Koeffizienten erhält man annähernd das gewünschte Rechteck, so wie in Abbildung 14 für $v_z = 1$ gezeigt. Der Vergleich mit dem vorgegebenen Rechteck zeigt, dass die Bessel-Funktionen brauchbare Ergebnisse liefern und daher auch für die weitere Vorgehensweise genutzt werden.

Nun soll die Membran in der Simulation etwas realitätsnäher werden, indem die Ecken des Zylinders mit einem Hann-Fenster abgerundet werden. Dafür wird das Rechteck mithilfe des Hann-Fensters ein- und ausgeblendet, so dass sich als Vorgabe für die Überlagerung mit Bessel-Funktionen ein Verlauf ergibt, wie in Abbildung 15a gezeigt. Die Berechnung der Koeffizienten γ_l erfolgt analog mit (9), einzig $g(r)$ hat sich geändert. Für $v_z = 1$ erhält man mit dieser neuen Vorgabefunktion die in Abbildung 15 gezeigte Membranform.

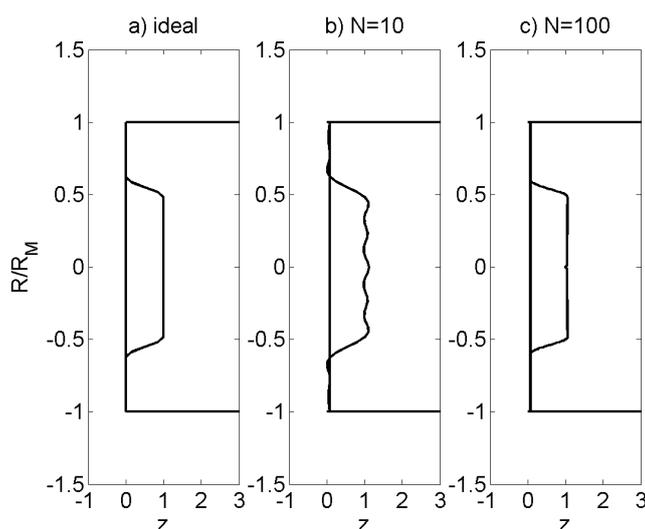


Abbildung 15: Der Beginn des Messrohres mit a) idealem Rechteck mit abgerundeten Ecken und b), c) aus überlagerten Bessel-Funktionen zusammengesetztem Rechteck mit abgerundeten Ecken als Membran für $v_z = 1$.

Lösung der Randwertaufgabe

Für die Schnelle im Rohr ergibt sich daraus [Wil99]

$$v(r, \phi, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \gamma_l J_0(k_{r_l} r) e^{-jk_z z}$$

und der Druck folgt aus der Euler-Gleichung als

$$p(r, \phi, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \gamma_l \frac{\omega \rho_0}{k_z} J_0(k_{r_l} r) e^{-jk_z z}. \quad (10)$$

Der resultierende Druckverlauf ist in Abbildung 16 für ein Rohr mit Radius $R = 10\text{cm}$ und Länge $L = 3\text{m}$, einem Membranradius $R_M = 8\text{cm}$ und eine Frequenz $f = 1800\text{Hz}$ dargestellt. Schon sehr schnell kann man für diese Dimensionierung erkennen, dass sich im Rohr eine ebene Welle ausbreitet. Auch ist gut zu erkennen, dass sich am Anfang des Rohres der Schalldruck eher kreisförmig ausbreitet, wie man es von der Kolbenmembran gewohnt ist.

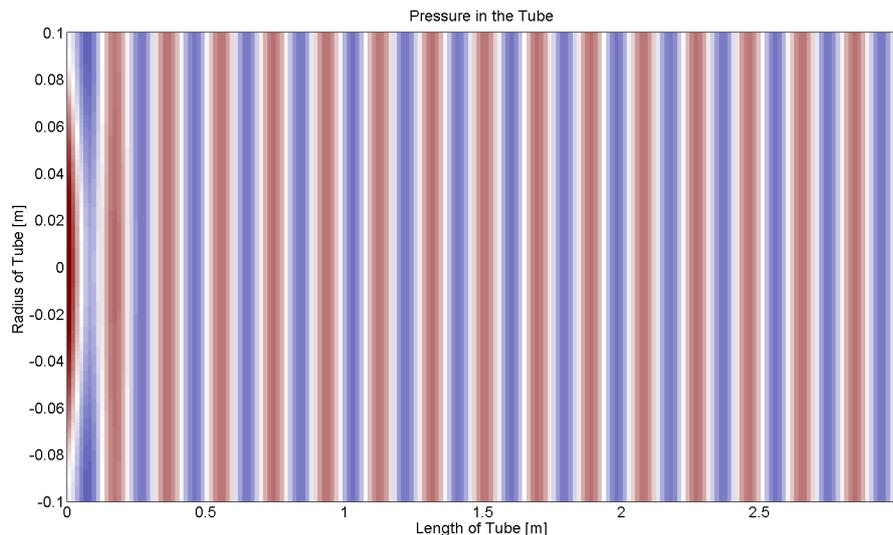


Abbildung 16: Druckverlauf im Rohr bei einer Membranschnelle 1.

2.5 Frequenzgang des Schalldruckes an einem Punkt im zylindrischen Messrohr

Mit (10) besteht neben der Betrachtung des Druckverlaufs für eine Frequenz über das gesamte Rohr auch die Möglichkeit, sich den Druck für alle gewünschten Frequenzen an einer Position des Rohres zu berechnen. Diese zweite Art der Betrachtung wird Frequenzgang oder Übertragungsfunktion genannt. Dafür wird in (10) ein festes r und ein

festes z gewählt und die Frequenz geändert. In Abbildung 17 sieht man die Frequenzgänge an verschiedenen Positionen für ein Rohr mit Radius $R = 10\text{cm}$. Aus (8) folgt als obere Grenzfrequenz für ebene Wellenausbreitung $f_{OG} = 2092\text{Hz}$ und man sieht, dass der Frequenzgang bis dahin auch eben verläuft. Für die Positionen, die sich nicht direkt an der Membran befinden, ist er sogar einigermaßen konstant.

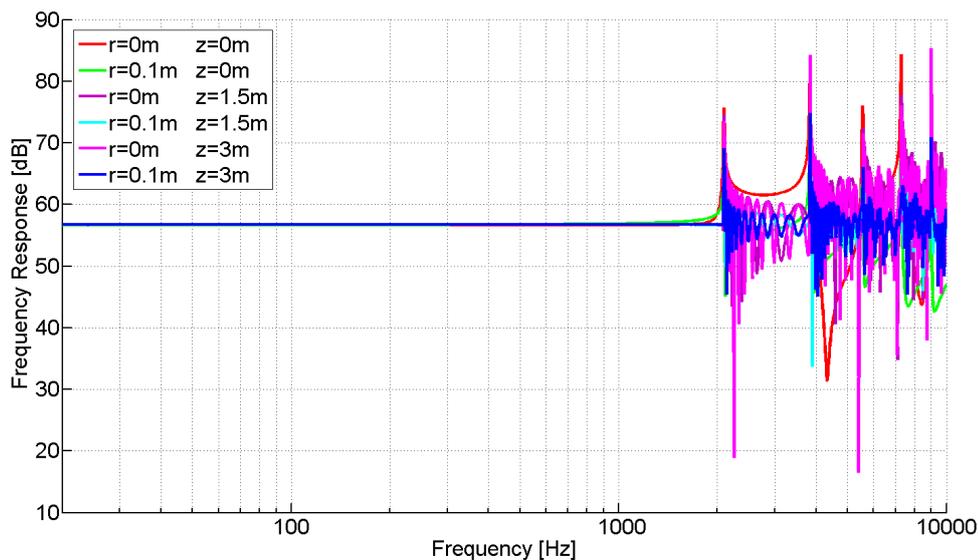


Abbildung 17: Frequenzgänge im Messrohr mit Radius $R = 10\text{cm}$.

2.6 Impedanzbedingung an beiden Rohrenden (rückgekoppelter Fall)

Um den Einfluss der Rohrabschlusses auf den Frequenzgang zu beurteilen, ist es notwendig, von unendlich vielen Reflexionen am Ende des Rohres und an der Membran auszugehen. Die Stärke der Reflexionen wird durch die beiden Reflexionsfaktoren r_1 am Ende des Rohres und r_2 an der Membran bestimmt, wobei ein Reflexionsfaktor von eins Totalreflexion bedeutet. Physikalisch sinnvolle Reflexionsfaktoren sind begrenzt mit

$$0 \leq |r_1|, |r_2| \leq 1.$$

Eine Schallwelle, die am Ende des Rohres ankommt, wird dadurch teilweise reflektiert, wird wieder zum Teil an der Membran reflektiert und so weiter, bis sie langsam ver-

schwindet. Die Überlagerung aller Reflexionen eines stationären Signals nennt man eingeschwungenen Zustand. Um diesen Zustand betrachten zu können, wird das Messrohr als Steuerkreis betrachtet. Dieser Regelkreis (closed loop control) ist in Abbildung 18 zu sehen, wobei $x'(z)$ das Eingangssignal, $y(L)$ die hinlaufende Welle am Rohrende, $w(L)$ die rücklaufende Welle an der Membran, $x(z)$ die eingekoppelte Welle, r_1 der Reflexionskoeffizient am Rohrende, r_2 der Reflexionskoeffizient am Rohreingang, $H(z)$ die Übertragungsfunktion der Welle im Rohr und $R=H(L)$ die Übertragung von einem Rohrende zum anderen ist. Die gestrichelten Linien zeigen die Abgriffspunkte für eine beliebige Position im Rohr, wobei sich die Welle aus der Überlagerung der hinlaufenden ($y_h(z)$) mit der rücklaufenden ($y_r(z)$) Welle zusammensetzt.

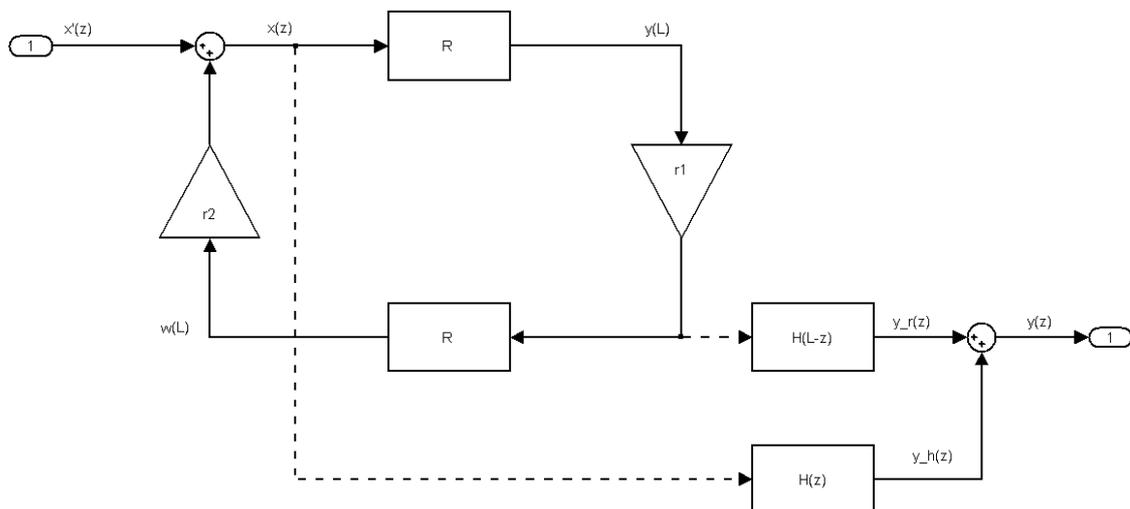


Abbildung 18: Das Messrohr mit Reflexionen als Regelkreis.

Durch Aufstellen und Lösen der Regelgleichungen, wie in Anhang A.5 gezeigt, ergibt sich als Ausbreitungsterm für das Messrohr im eingeschwungenen Zustand

$$\Gamma(z) = \frac{r_1 e^{-jk_z(2L-z)} + e^{-jk_z z}}{1 - r_1 r_2 e^{-j2k_z L}}.$$

Setzt man diesen neuen Ausbreitungsterm in (10) ein, so erhält man für den eingeschwungenen Zustand

$$p(r, \phi, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \gamma_l \frac{\omega \rho_0}{k_z} J_0(k_{r_l} r) \Gamma(z).$$

Schafft man durch effektive Absorption die Anpassung, so dass $r_1 = 0$, reduziert sich der Ausbreitungsterm auf die bekannte Form $e^{-jk_z z}$.

2.7 Elektroakustisches Modell für Kolbenmembran / Lautsprecher

Bisher wurde zur Erzeugung des Messsignals die konphas schwingende Kolbenmembran am Rohreingang betrachtet. In der Praxis wird das Quellsignal von einem Lautsprecher erzeugt, auf dessen Modell hier näher eingegangen wird. Der dynamische Wandler, der in Anhang A.6 näher erläutert wird, ist der bei Lautsprechern am häufigsten verwendete, weswegen sich diese Arbeit auf diesen beschränkt. Im Ersatzschaltbild für das resultierende System, welches in Abbildung 19 zu sehen ist, wird der Lautsprecher mit Thiele/Small-Parametern beschrieben, die Anfang der 70er Jahre von Neville Thiele und Richard Small eingeführt wurden. Mit diesen Parametern lässt sich das Übertragungsverhalten des Lautsprechers beschreiben, weswegen sie Standardgrößen für die Analyse und Entwicklung von geschlossenen und ventilierten Lautsprecherboxen geworden sind. Für den Vergleich verschiedener Lautsprecher als Quelle am Messrohr werden folgende Thiele/Small-Parameter benötigt:

- Membranmasse M [kg]
- Steifigkeit s oder Nachgiebigkeit $C_{ms} = \frac{1}{s}$ [mm/N]
- Reibwiderstand W [kg/s]
- Wandlerkonstante $\beta = B l$ [Tm]
- Induktivität L_s [H]
- elektrischer Widerstand R_s [Ω].

Üblicherweise findet man diese Parameter im Datenblatt des Lautsprechers, sollte ein Datenblatt nicht alle oben angeführten Thiele-Small-Parameter enthalten, kann man die restlichen Thiele-Small-Parameter aus der Wandlerkonstanten und dem Impedanzverlauf abschätzen. Zumindest für einen gewissen Frequenzbereich um die Resonanzfrequenz bekommt man damit akzeptable Ergebnisse.

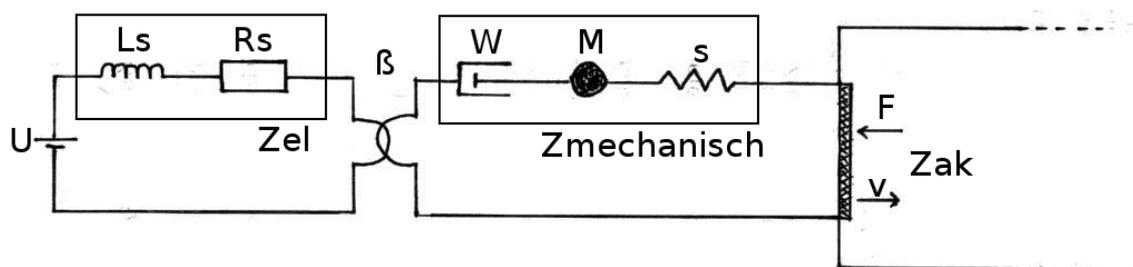


Abbildung 19: Ersatzschaltbild vom Messrohr mit Lautsprecher als Quelle.

Wie aus Abbildung 19 ersichtlich, lässt sich die elektrische Impedanz des Systems auf die mechanisch auf die Membran wirkende akustische Strahlungsimpedanz, die rein mechanische Impedanz der Membran und ihrer Aufhängung und die Impedanz der elektrischen Komponenten aufteilen, die in den folgenden Abschnitten gesondert betrachtet werden. Abschließend lässt sich der resultierende Schalldruckpegel im Messrohr simulieren, wobei eine wesentliche physikalische Grenze des Lautsprechers, die maximale Membranauslenkung, nicht vernachlässigt werden darf.

2.7.1 Mechanisch auf Membran wirkende akustische Strahlungsimpedanz

Um die mechanisch auf die Membran wirkende Kraft, die sich aus dem Schallfeld im Messrohr ergibt, zu berechnen, geht man von einem statischen Modell aus, bei dem die Membran bewegungslos ist. Integriert man den Schalldruck an der Membranfläche, ergibt sich die auf die Membran wirkende Kraft F_{ak} :

$$F_{ak} = \int_{\Omega_{Membran}} p(r, \phi, z = 0) \, d\Omega.$$

Durch Erweiterung der Grenzen und gleichzeitige Einschränkung des Integrals durch eine Aperturfunktion lässt sich die Kraft auf eine Kolbenmembran mittels der *closure equation* bestimmen, wenn die Aperturfunktion in Bessel-Funktionen zerlegt wird. Aus

$$a(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k J_0(k_{r_k} r) \stackrel{!}{=} \begin{cases} 1 & r \leq R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

folgt für die Kraft

$$F_{ak} = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} a(r)p(r, \phi, 0)r \, dr \, d\phi,$$

so dass man mit Hilfe der *closure equation*

$$F_{ak} = 2\pi \frac{\omega \rho_0 R}{k_z} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\gamma_l)^2}{k_{rl}}$$

erhält, wie im Anhang A.4 gezeigt. Für ein lineares Modell, von dem hier ausgegangen wird, gilt das Superpositionsprinzip, so dass als mechanisch auf die Membran wirkende akustische Strahlungsimpedanz Z_{ak} mit $v = 1$ folgt [Zot09]:

$$Z_{ak} = 2\pi \frac{\omega \rho_0}{k_z} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\gamma_l)^2}{k_{rl}}.$$

2.7.2 Rein mechanische Impedanz der Membran und deren Aufhängung

Um die Schnelle der Membran zu erzeugen, ist die Kraft $F_{mechanisch}$ notwendig, die sich durch

$$F_{mechanisch} = Z_{mechanisch} \cdot v$$

ausdrücken lässt. Die mechanische Impedanz der Membran und ihrer Aufhängung, $Z_{mechanisch}$, ergibt sich beim dynamischen Lautsprecher zu

$$Z_{mechanisch} = j\omega M + W + \frac{1}{j\omega C_{ms}}.$$

Die inhomogene, durch die Kraft F angeregte Bewegung der Membran lässt sich durch Überlagerung der Kräfte beschreiben [Zot09]:

$$F = F_{ak} + F_{mechanisch} = (Z_{ak} + Z_{mechanisch}) v = Z \cdot v.$$

Die neue Impedanz Z repräsentiert dabei die akustischen und mechanischen Eigenschaften des Systems.

2.7.3 Impedanz der elektrischen Komponenten

Normalerweise werden die Schnelle und Kraft der Membran eines Lautsprechers durch elektrische Verstärker erzeugt, wobei die Umwandlung der Eingangsspannung U in die Ausgangskraft F und des Eingangsstroms I in die Ausgangsschnelle v am Gyrator geschieht, wie in Abbildung 19 eingezeichnet. Der Gyrator lässt sich durch die Wandlerkonstante β beschreiben, so dass sich mittels der Wandlergleichungen

$$\begin{pmatrix} U \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \frac{1}{\beta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ v \end{pmatrix}$$

die Transformation der mechanischen Elemente in elektrische ergibt, wie in Anhang A.7 angeführt.

Die Impedanz der elektrischen Komponenten ergibt sich zu

$$Z_{el} = j\omega L_s + R_s.$$

2.7.4 Elektrische Impedanz und Zusammenhang zwischen Membranschnelle und Eingangsspannung

Fasst man die einzelnen Elemente zu den eben erläuterten Impedanzen zusammen, erhält man das in Abbildung 20 gezeigte vereinfachte Ersatzschaltbild mit

$$Z_{el} = R_s + j\omega L_s = \frac{U_{el}}{I}$$

und

$$Z_W = \frac{\beta^2}{Z_{mechanisch} + Z_{ak}} = \frac{U_W}{I}.$$

Die Gesamtimpedanz des Messsystems resultiert aus der Summe der Einzelimpedanzen:

$$Z = Z_{el} + Z_W = Z_{el} + \frac{\beta^2}{Z_{mechanisch} + Z_{ak}}.$$

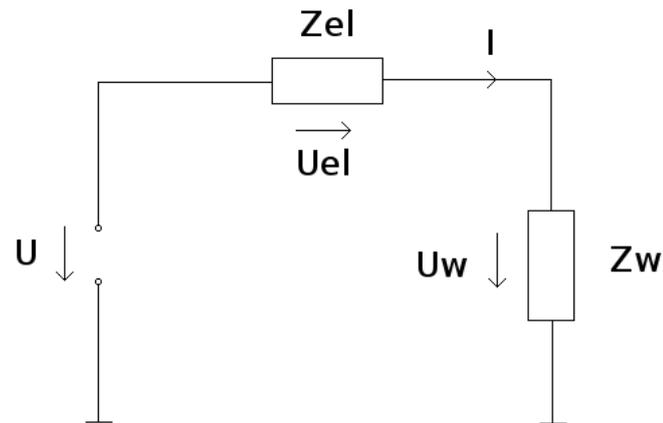


Abbildung 20: vereinfachtes Ersatzschaltbild vom dynamischem Lautsprecher am Messrohr.

Für die Spannungen in Abbildung 20 erhält man unter Einbeziehung der Wandlergleichung

$$U_W = \beta v \quad \text{und} \quad U_{el} = \frac{Z_{el}(Z_{mechanisch} + Z_{ak})}{\beta} v$$

Die Gesamtspannung U lässt sich daraus durch Einsetzen in die Maschengleichung berechnen:

$$U = U_{el} + U_W = \left(\beta + \frac{Z_{el}(Z_{mechanisch} + Z_{ak})}{\beta} \right) v. \quad (11)$$

Der Zusammenhang zwischen Spannung und Schnelle wird in den folgenden Kapiteln benötigt, um daraus den Schalldruckpegel und die Membranauslenkung bestimmen zu können.

2.7.5 Schalldruckpegel im Messrohr

Um im Messrohr Messungen bei möglichst hohen Schalldrücken durchführen zu können, ist es notwendig, den Schalldruckpegel im Rohr bei Betrieb mit bestimmten Lautsprechern abschätzen zu können. Mit dem im vorherigen Abschnitt ermittelten Zusammenhang zwischen Spannung und Membranschnelle lässt sich der Schalldruck im Rohr berechnen zu:

$$p(r, \phi, z, U) = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \gamma_l \frac{\omega \rho_0}{k_z} J_0(k_{r_l} r) \Gamma(z) \right) \frac{U}{\beta + \frac{Z_{el}(Z_M + Z_{ak})}{\beta}}.$$

Dabei wird davon ausgegangen, dass sich die Membran näherungsweise nur rotations-symmetrisch in z-Richtung bewegt ($v_z \approx v$).

Der Schalldruckpegel beschreibt das logarithmierte Verhältnis vom quadrierten Effektivwert des Schalldruckes zum Quadrat eines Bezugswerts. Als Bezugswert für Luftschall wurde $p_0 = 20\mu Pa$, die mittlere Hörschwelle des menschlichen Gehörs bei 1kHz, festgelegt. Die englische Bezeichnung ist *Sound Pressure Level*, weswegen hier die Abkürzung SPL verwendet wird. Das Ergebnis wird mit der Hilfsmaßeinheit Dezibel (Abkürzung dB) gekennzeichnet. Für den Schalldruckpegel im Messrohr mit angeschlossenem Lautsprecher folgt daraus

$$SPL = 20 \log_{10} \left| \frac{p(r, \phi, z, U)}{p_0} \right| \quad \text{mit} \quad p_0 = 20 \cdot 10^{-6} Pa.$$

2.7.6 Membranauslenkung als physikalische Grenze

Ein wesentliches Kriterium für die Belastbarkeit von Lautsprechern ist die maximale Membranauslenkung, auf die in diesem Abschnitt näher eingegangen werden soll. Der berechnete Schalldruckpegel ergibt zwar die Stärke des Schallfeldes im Rohr, stellt aber nicht sicher, ob der maximal mögliche lineare Arbeitsbereich des Antriebssystems und der Membranaufhängung bei dieser Spannung nicht überschritten wird. Daher soll nun die Membranauslenkung in Abhängigkeit von Frequenz, Thiele-Small-Parametern, mechanisch an der Membran wirksamer akustischer Impedanz und Eingangsspannung bestimmt werden.

Beschreibt $x(t)$ die Auslenkung der Membran, so ergibt sich ihre Geschwindigkeit $v(t)$ durch Ableiten der Auslenkung nach der Zeit. Unter der Annahme, dass nur harmonische Schwingungen auftreten, lässt sich die Membranschnelle damit zu

$$v(t) = j\omega x(t)$$

berechnen und mit (11) und Division durch $(j\omega)$ erhält man die Membranauslenkung

$x(t)$:

$$x(t) = \frac{U}{j\omega \left(\beta + \frac{Z_{el}(Z_M + Z_{ak})}{\beta} \right)}.$$

2.8 Simulation des Schallfeldes im Rohr

Die Betrachtungen in den letzten Abschnitten liefern Werkzeuge, um das Schallfeld im Messrohr für eine bestimmte Frequenz zu beschreiben und den Schalldruckverlauf für alle Frequenzen an einer Position im Rohr zu ermitteln. Es besteht die Möglichkeit zu überprüfen, ob sich bei vorgegebenen Rohrdimensionen ein ebenes Wellenfeld einstellt oder ob es von evaneszenten Wellen überlagert wird. Bei Verwendung eines Lautsprechers als Schallquelle lassen sich die elektrische Impedanz des Messsystems, der bei einer bestimmten Eingangsspannung resultierende Schalldruckpegel und die dabei benötigte Membranauslenkung bestimmen.

Da die oben genannten Methoden fast alle in den folgenden Kapiteln verwendet werden, wird hier nur beispielhaft auf die Möglichkeit des Schallfeldes im Rohr für eine Frequenz eingegangen. Für ein Messrohr mit der Länge $L = 1\text{m}$, dem Radius $R = 10\text{cm}$ und einer schwingenden Membran, die einen Radius von $R_M = 7\text{cm}$ beginnen die Ausbreitung der evanszenten Moden ab $f = 2092\text{Hz}$. Wird die Ausbreitung bei $f = 2000\text{Hz}$ betrachtet, wie in Abbildung 21 gezeigt, sieht man nach kurzem Einschwingen ein ebenes Wellenfeld. Im Vergleich dazu wird die Ausbreitung evaneszenter Wellen in Abbildung 22 gezeigt, wo das Wellenfeld im gleichen Rohr für eine Frequenz von $f = 2200\text{Hz}$ betrachtet wird.

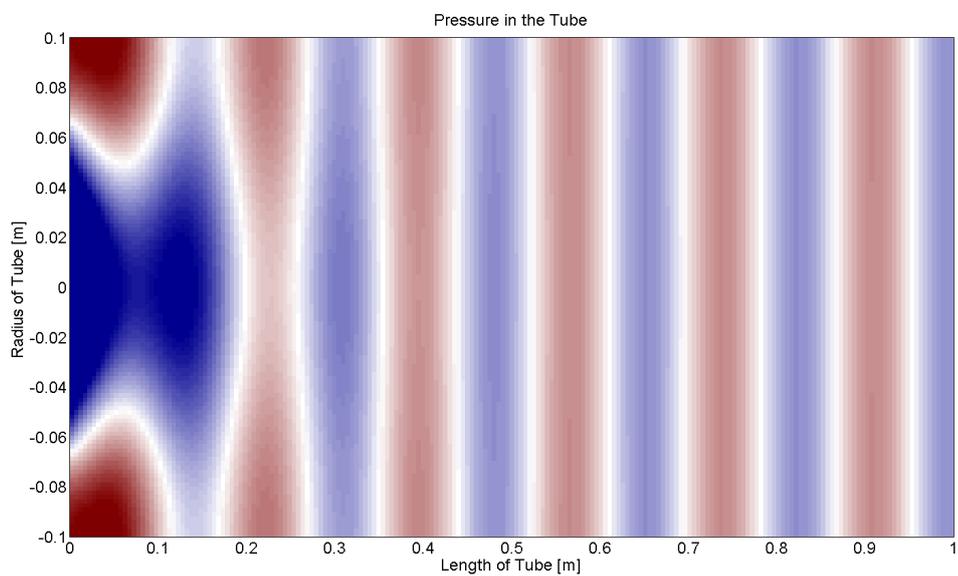


Abbildung 21: Schalldruck im Messrohr ($L = 1\text{m}$, $R = 10\text{cm}$ und $R_M = 7\text{cm}$) für $f = 2000\text{Hz}$.

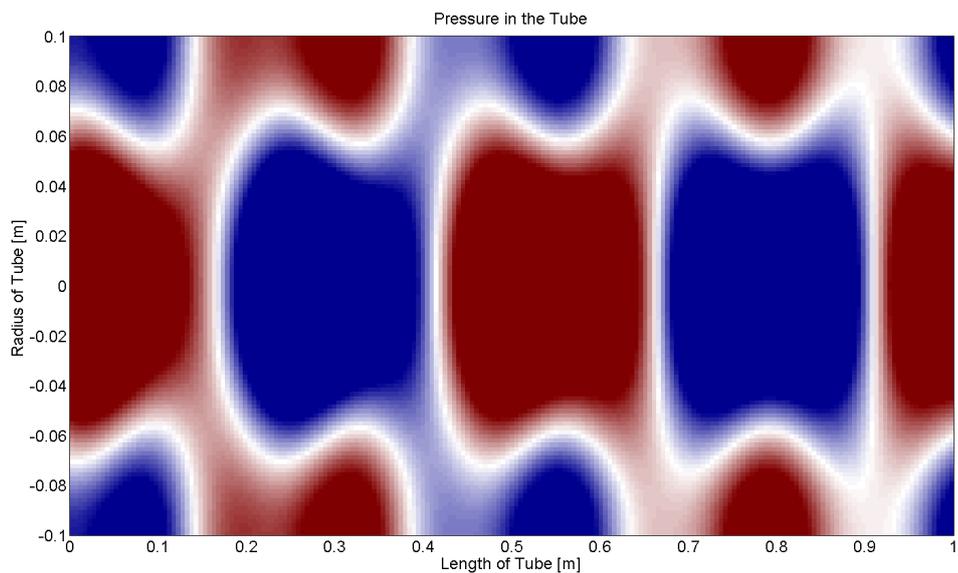


Abbildung 22: Schalldruck im Messrohr ($L = 1\text{m}$, $R = 10\text{cm}$ und $R_M = 7\text{cm}$) für $f = 2200\text{Hz}$.

3 Fallstudie und Vergleich mit Messungen an einem Impedanzrohr

Mit den in den vorherigen Abschnitten entwickelten Resultaten wird nun das Impedanzmessrohr, welches schon zu Beginn des ersten Kapitels erwähnt wurde, auf seine Eigenschaften als Messrohr untersucht. Dazu ist zu erwähnen, dass nicht die besten Ergebnisse zu erwarten sind, da dieses Rohr nicht zur Vermessung von Mikrofonen, sondern zur Messung von Impedanzen verschiedener Materialien konstruiert wurde. Für diese Anwendung gibt es gesonderte Anforderungen, die das Rohr exzellent erfüllt. Der Messbereich, in dem das Rohr dabei verwendet wird, liegt etwa im Bereich 100Hz bis 2kHz. Zunächst wird evaluiert, was man bei Nutzung der vollen Rohrlänge (74cm) erwarten kann. Der Einfluss der Rohrlänge, der Messposition und des Rohrabschlusses auf das Messergebnis wird anhand von Simulationen herausgearbeitet und mit praktischen Messungen bestätigt. Den Großteil der direkten Vergleiche zwischen Simulation und Messung findet man im Anhang C. Bei den Vergleichen zwischen theoretischen Verläufen mit den praktischen Messungen sind die Unterschiede damit zu begründen, dass Einflüsse von Verstärker, Messmikrofon *AKG C480B*, Kabeln und Dämpfungen der Schallwelle längs ihres Ausbreitungsweges nicht berücksichtigt wurden. Dämpfungen der Schallwelle entstehen durch die immer vorhandene innere Luftdämpfung, aber auch die Energieabgabe nach außen. Obwohl bei Messrohren darauf geachtet wird, dass die Rohrwände eine hohe Luftschalldämmung haben, bleibt sie doch endlich, so dass immer auch ein wenig Schallenergie nach außen dringen kann [Mös07]. Auch ist nicht bekannt, welchen Reflexionsfaktor die Lautsprechermembran hat und wie die Partialschwingungen der Membranen von Lautsprecher und Messmikrofon aussehen, so dass alle diese Effekte für Abweichungen zwischen Theorie und Praxis führen. Trotzdem zeigt sich, dass mit dem vorgeschlagenen Modell die grundsätzlichen Problembereiche in Messrohren abgebildet sind. Als Quellsignal wurde für alle Messungen ein exponentieller Sweep verwendet.

3.1 Nutzung bei voller Länge

Die angegebenen Simulationen und Messungen sind mit dem Impedanzmessrohr bei folgenden Einstellungen geschehen: Länge $L = 74\text{cm}$, Radius $R=5\text{cm}$, Treiber *Visaton W 100 S* und mit annähernd schallhartem Abschluss.

Betrachtet man die mechanisch auf die Membran wirkende akustische Strahlungsimpedanz des Impedanzmessrohres, wie sie in Abbildung 23 zu sehen ist, erkennt man den Beginn der unerwünschten Moden bei $f = 4183\text{Hz}$ für $l = 1$ und $f = 7659\text{Hz}$ für $l = 2$ als Singularität mit anschließendem sprunghaftem Anstieg im Impedanzverlauf. Die noch höheren Moden breiten sich erst ab dem hier nicht betrachteten Frequenzbereich über 10kHz aus. Darüber hinaus sind die Reflexionen, die durch den schallharten Abschluss und die Membran entstehen, deutlich an der Welligkeit des Impedanzverlaufs zu erkennen. Die Spitzen, die bei etwa 20Ns/m liegen, haben einen Abstand von 462Hz voneinander, was einer Wellenlänge von $\lambda = 74\text{cm}$ und damit der Rohrlänge entspricht.

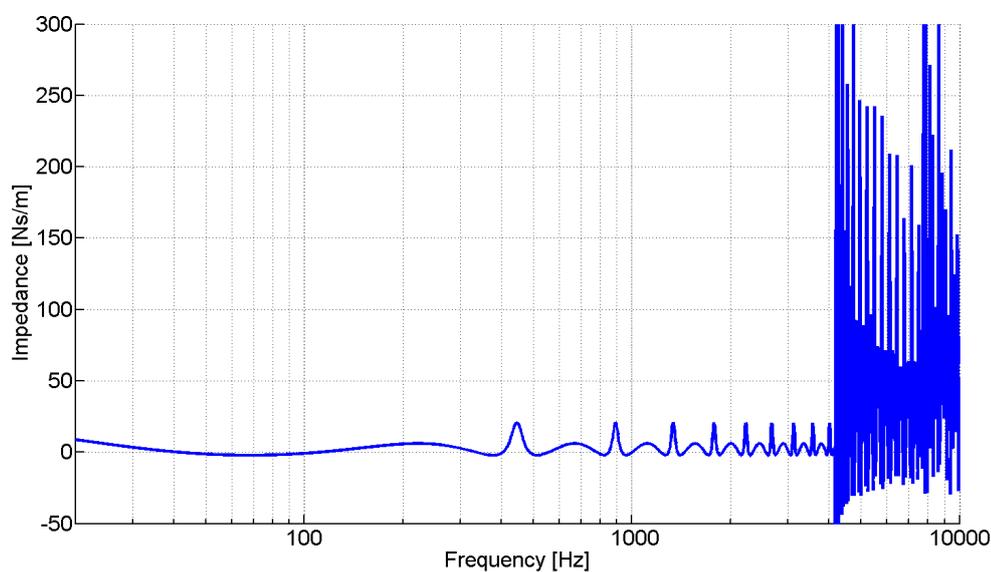


Abbildung 23: Simuliert mechanisch auf die Membran wirkende akustische Strahlungsimpedanz beim Messrohr ($R = 5\text{cm}$, $L = 74\text{cm}$, $r_1 = 0,8$, $r_2 = 0,9$).

Diese Reflexionen wirken sich auf den in Abbildung 24 dargestellten Gesamtimpedanzverlauf aus, an dem man die Reflexionen deutlich ausgeprägt erkennen und den Beginn der unerwünschten Moden als Peaks wahrnehmen kann.

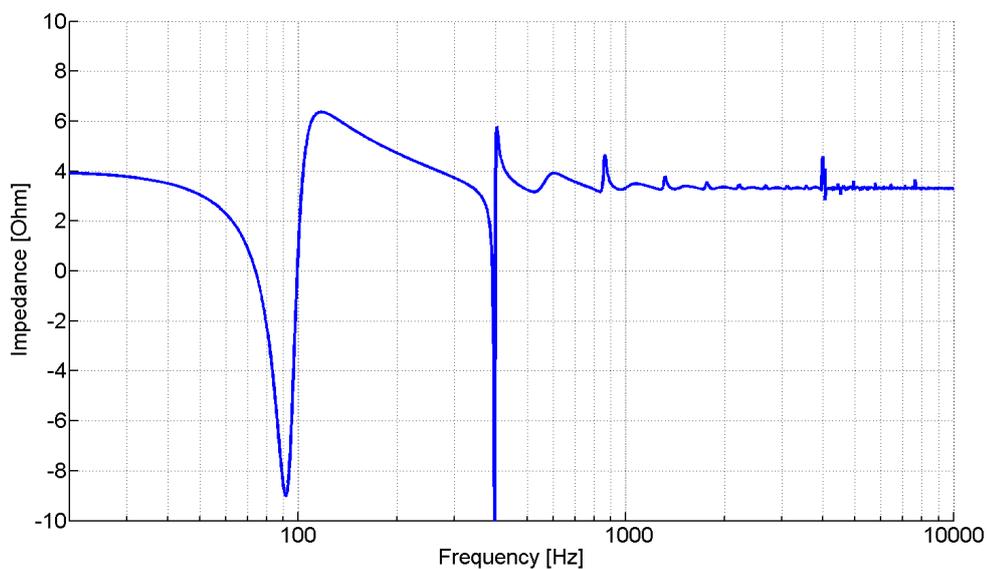


Abbildung 24: Simulierte Gesamtimpedanz beim Messrohr ($R = 5\text{cm}$, $L = 74\text{cm}$, $r_1 = 0,8$, $r_2 = 0,9$) mit *Visaton W 100 S*.

Die Welligkeiten in der Gesamtimpedanz haben zur Folge, dass auch der Schalldruckpegel sehr wellig aussieht, wie in Abbildung 25 gezeigt wird. Es ist dort die Simulation im Vergleich mit dem gemessenen Verlauf zu sehen. Speziell im Bereich der ebenen Wellenausbreitung bis 4kHz liegen die Singularitäten gut übereinander. Die Unterschiede in Amplitude und Güte lassen sich auf die oben angeführten Effekte zurückführen. Dies ist auch der Grund für die Abweichungen oberhalb von 4kHz. Insgesamt ist aber eine gewisse Korrelation zu erkennen mit einem mittleren Fehler von unter 10dB.

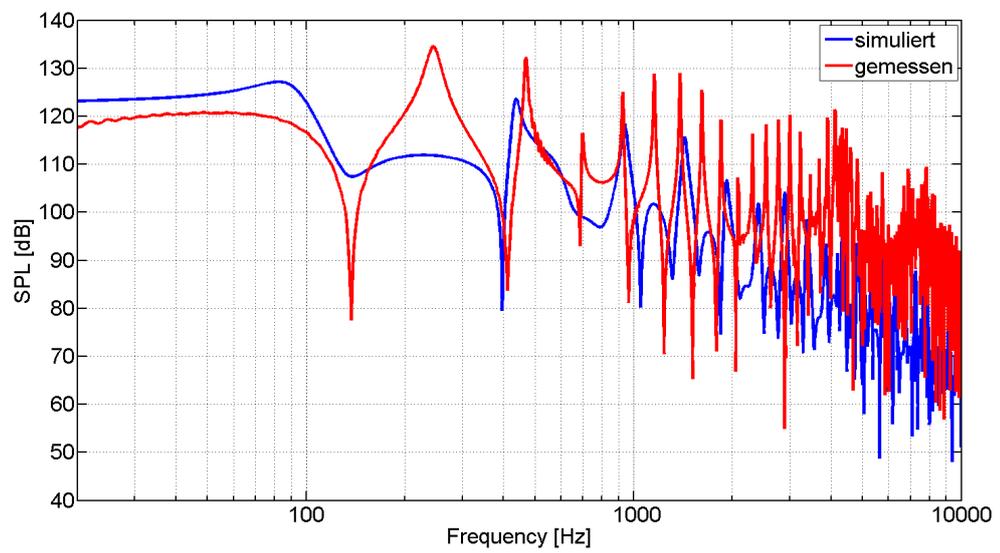


Abbildung 25: Schalldruckpegel beim Messrohr ($R = 5\text{cm}$, $L = 74\text{cm}$) mit *Visaton W 100 S*.

3.2 Einfluss des Abschlusses

Um mit verschiedenen Abschlüssen im Impedanzmessrohr zu messen, wurde die Länge auf 41cm eingestellt. Vergleichend sind hier eine Messung mit schallhartem Abschluss und eine mit einem Absorber, der einen Reflexionsfaktor von etwa $r_1 = 0,15$ hat, gegenübergestellt.

Schon beim Vergleich der mechanisch auf die Membran wirkenden akustischen Strahlungsimpedanz erkennt man, dass im Fall des Absorbers die Welligkeit bei der ebenen Wellenausbreitung deutlich nachgelassen hat, wie in Abbildung 26 präsentiert wird.

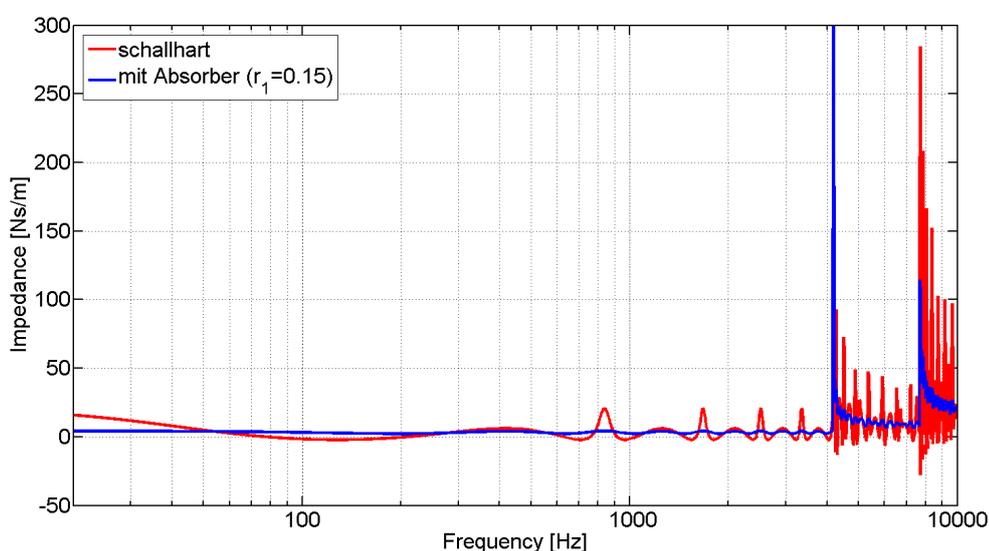


Abbildung 26: Vergleich der simulierten mechanisch auf die Membran wirkenden akustischen Impedanz mit schallhartem Abschluss und Absorber ($r_1 = 0,15$).

Dies sieht man auch in Abbildung 27 an der Gesamtimpedanz, die im Fall des Absorbers fast nur noch von der Treiberimpedanz dominiert wird, während beim schallharten Abschluss deutliche Reflexionen zu erkennen sind.

Der Schalldruckpegelverlauf, der zur Verdeutlichung auch für den angepassten Abschluss in Abbildung 28 zu sehen ist, verläuft beim Absorber entsprechend glatter, während er im angepassten Fall sogar fast wellenfrei ist.

Auch bei den gemessenen Schalldruckpegeln, die in Abbildung 29 dargestellt sind, lässt sich der Einfluss des Absorbers sehr gut erkennen.

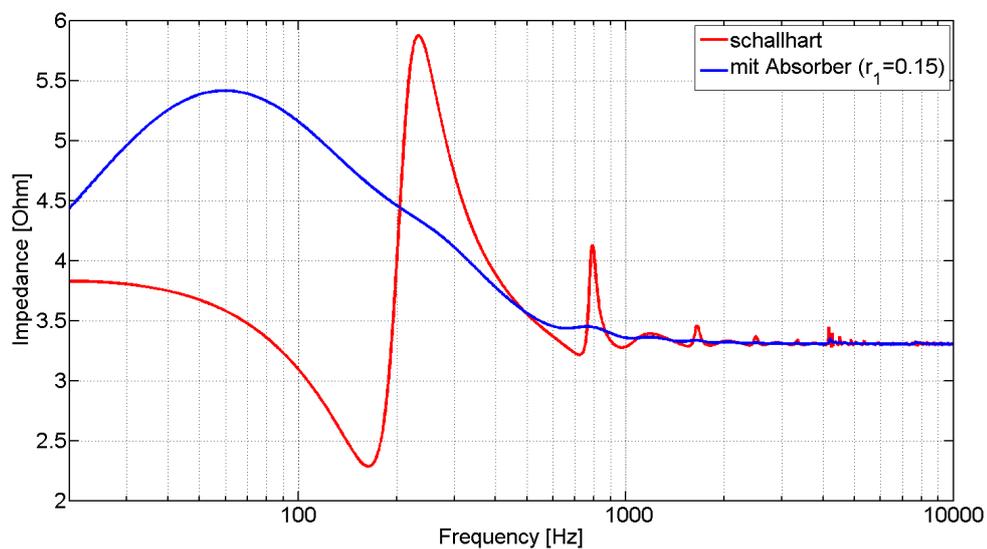


Abbildung 27: Vergleich der simulierten Gesamtimpedanz mit schallhartem Abschluss und Absorber ($r_1 = 0,15$).

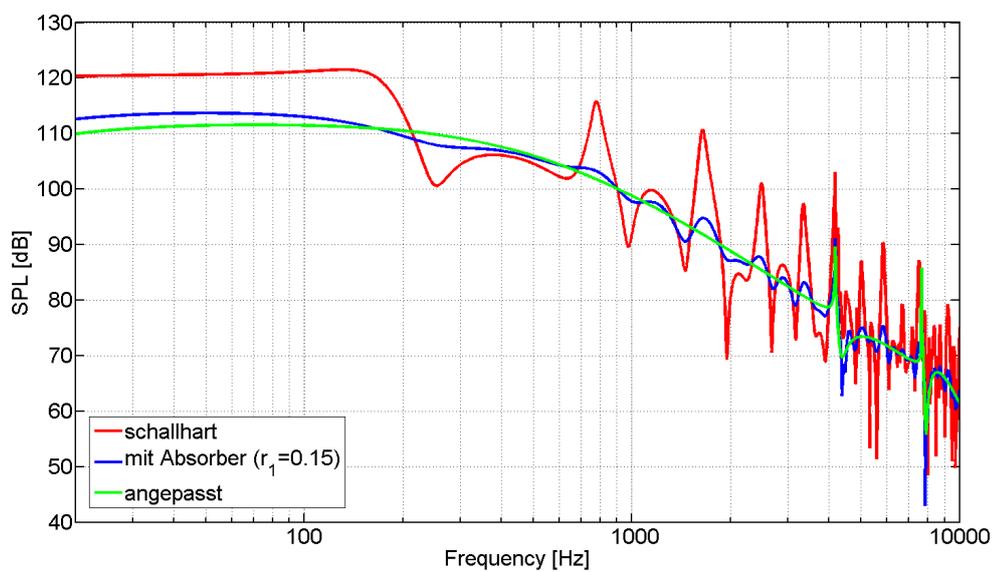


Abbildung 28: Vergleich des simulierten SPL mit schallhartem Abschluss und Absorber ($r_1 = 0,15$).

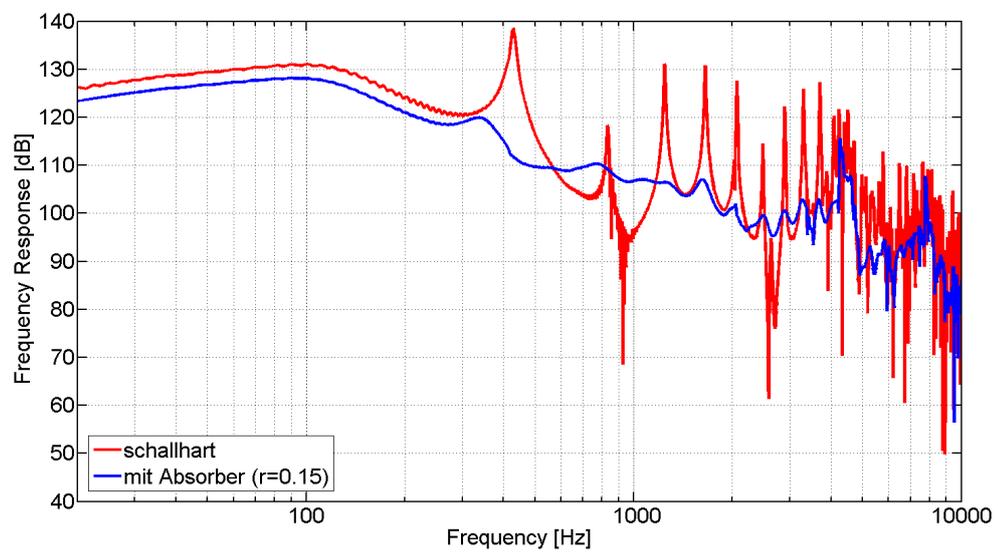


Abbildung 29: Vergleich des gemessenen SPL mit schallhartem Abschluss und Absorber ($r_1 = 0,15$).

3.3 Einfluss der Messposition

Vergleicht man die Schalldruckpegel für verschiedene Position im 41cm langen Impedanzmessrohr, wie in den Abbildungen 30 und 31 simuliert, stellt man fest, dass in der Theorie im nutzbaren Frequenzbereich annähernd gleiche Werte gemessen werden sollten.

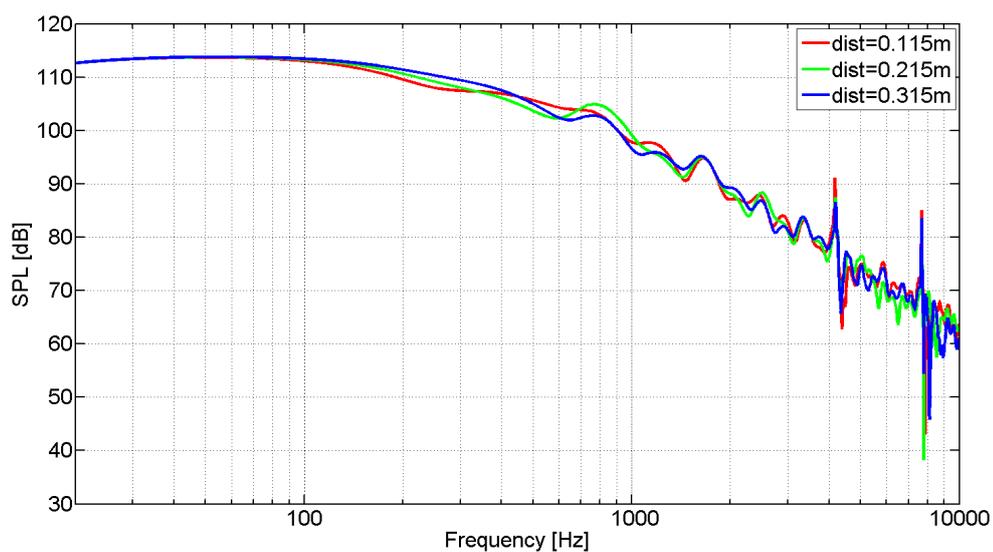


Abbildung 30: Vergleich des simulierten SPL mit Absorber ($r_1 = 0,15$) für drei Messpositionen.

Dabei spielt es keine Rolle, ob das Rohr komplett angepasst ist oder noch ein Teil Reflexionen zugelassen werden.

In der Praxis allerdings wurden Unterschiede von bis zu 5dB von Position zu Position gemessen, wie in Abbildung 32 zu sehen ist, was durch die am Anfang des Kapitels erwähnten Effekte zu erklären ist.

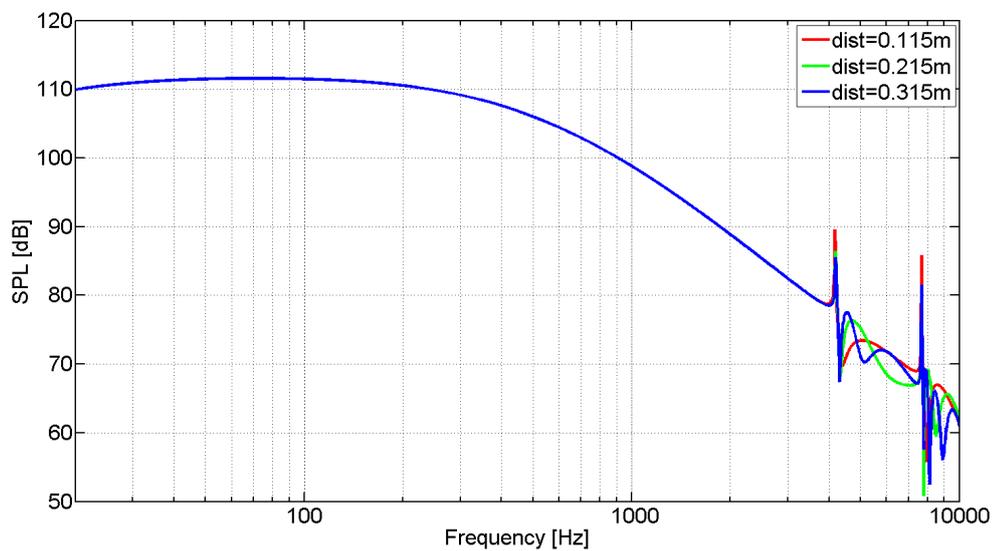


Abbildung 31: Vergleich des simulierten SPL im angepassten Fall für drei Messpositionen.

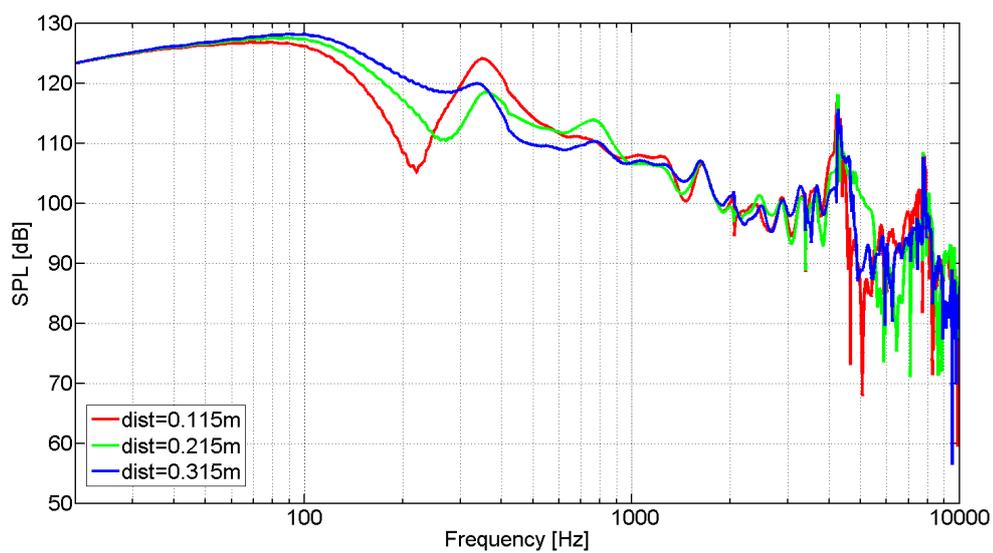


Abbildung 32: Vergleich des gemessenen SPL mit Absorber ($r_1 = 0,15$) für drei Messpositionen.

3.4 Einfluss der Rohrlänge

Abbildungen 33, 34 und 35 zeigen den simulierten Schalldruckpegel für zwei Rohrlängen mit schallhartem, reflexionsarmen und angepasstem Abschluss.

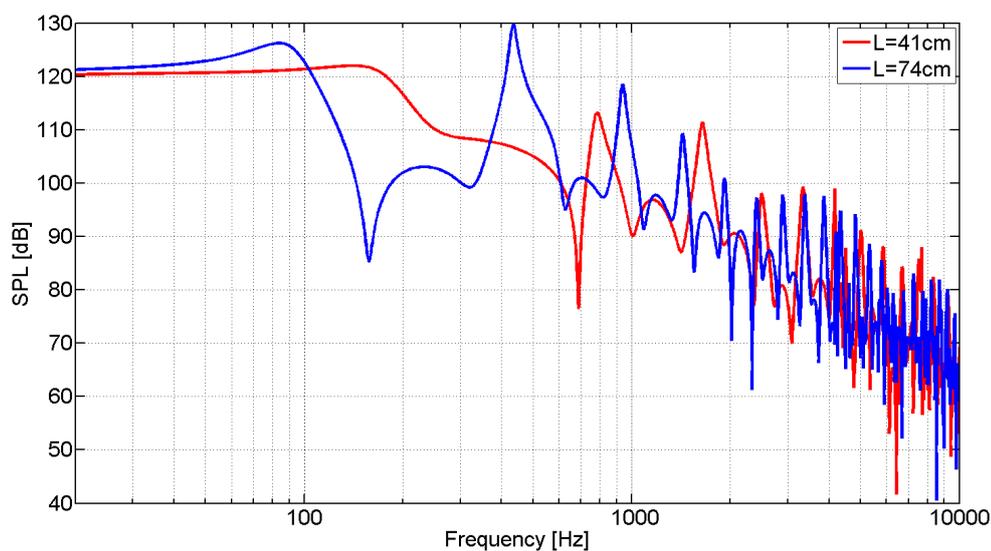


Abbildung 33: Vergleich des simulierten SPL mit schallhartem Abschluss für zwei Rohrlängen.

Die Rohrlänge im angepassten Fall wirkt sich überhaupt nicht auf den Schalldruckpegel aus.

In den anderen Fällen verändert die Rohrlänge den Reflexionsanteil an einer Stelle im Rohr, weswegen die Schalldruckpegel zwar im gleichen Wertebereich, aber nicht identisch verlaufen.

Diese Beobachtung lässt sich mit Abbildung 36, wo der gemessene SPL gezeigt wird, verifizieren.

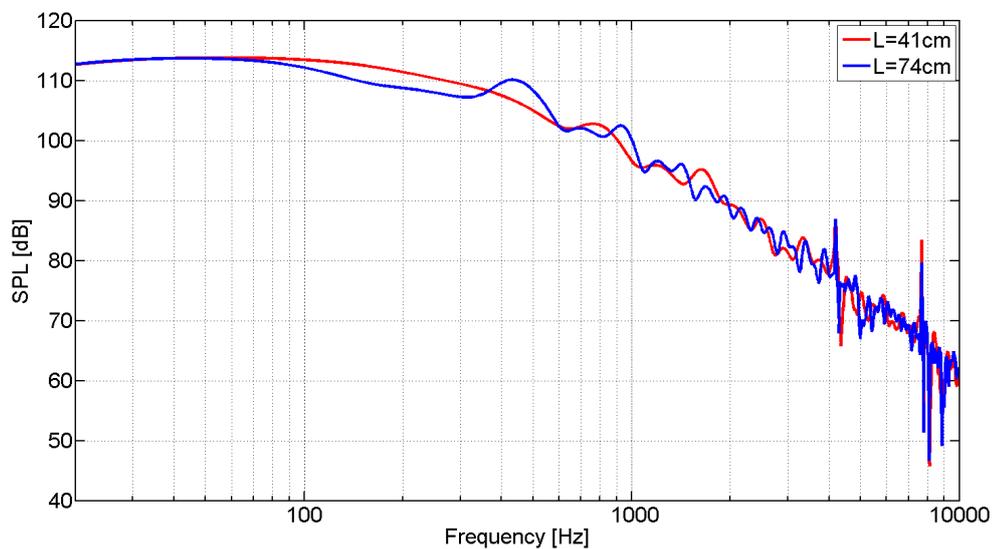


Abbildung 34: Vergleich des simulierten SPL mit Absorber ($r_1 = 0,15$) für zwei Rohrlängen.

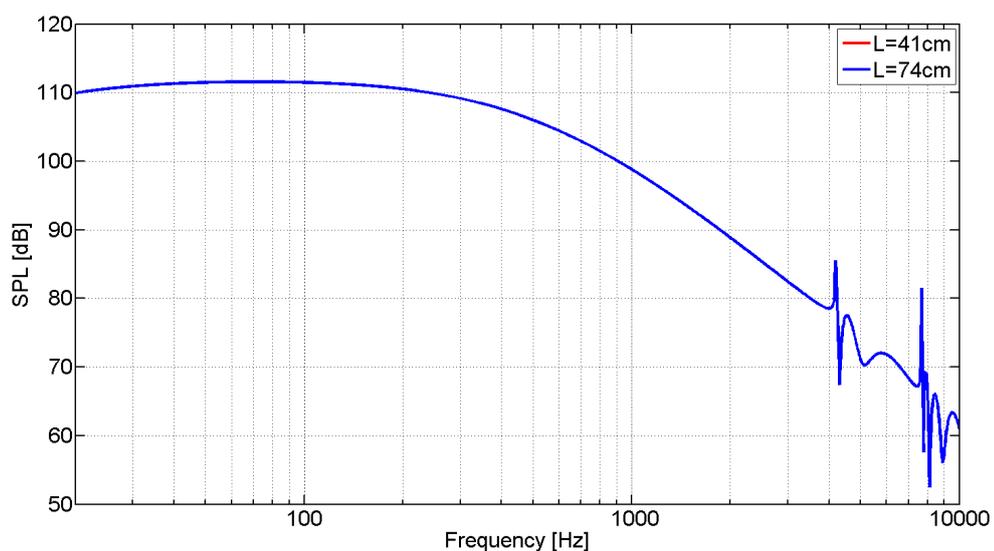


Abbildung 35: Vergleich des simulierten SPL mit angepasstem Abschluss für zwei Rohrlängen.

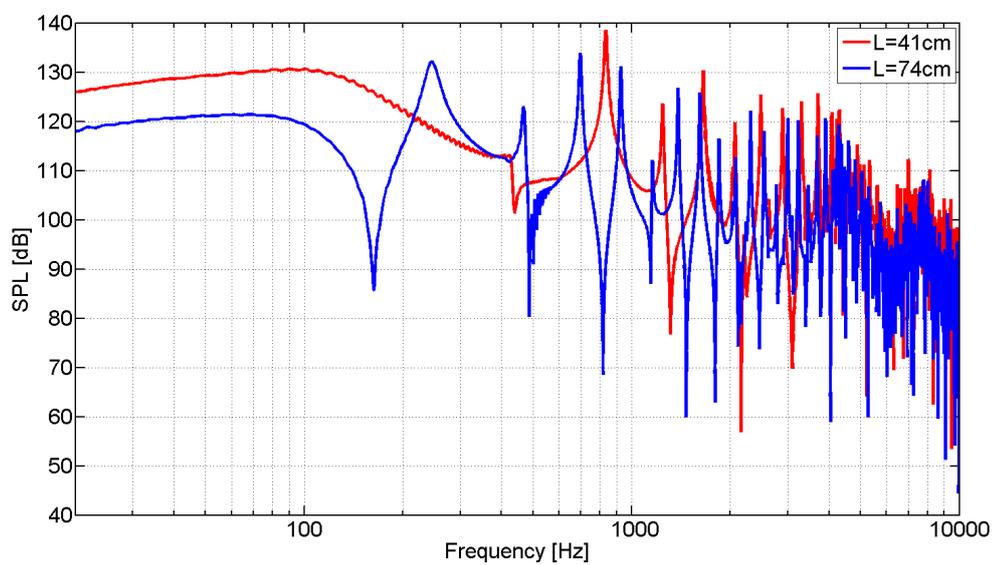


Abbildung 36: Vergleich des gemessenen SPL mit schallhartem Abschluss für zwei Rohrlängen.

4 Entwurf eines Messrohres zur Messung von Freifeld-Mikrofonfrequenzgängen mit hohen Schalldruckpegeln

Anhand der in Kapitel 2 erstellen Überlegungen werden hier die benötigten Parameter für ein Messrohr gewählt, in dem MEMS-Mikrofone gemessen werden sollen. Es soll ein Rohr mit zylindrischem Querschnitt dimensioniert werden, wobei Materialwahl und Wanddicke sowie die technische Umsetzung der Vorgaben von der Firma *ADOLF HERZOG GmbH* ausgeführt werden. Es wird allerdings empfohlen, ein Rohr zu bauen, dessen Wände schwer und dick genug sind, um nicht vom Messsignal in Schwingung gebracht zu werden. Bei runden Rohren wird eine Wanddicke von etwa 5% des Durchmessers empfohlen. Das Messrohr soll gerade sein und einen konstanten Querschnitt sowie eine starre, glatte, nicht poröse Wand besitzen, die außer für die Mikrofone keine Schlitze oder Löcher besitzt [Fac], [SJD08].

Aus praktischen Gründen wird es ein Übergangsstück zwischen Lautsprecherauslass und Rohreingang geben, das exponentiell geformt ist, um die dadurch auftretenden Impedanzen gering zu halten. Das Rohr soll aus mehreren Teilen bestehen, die durch Flansche fest miteinander verbunden werden, um die Länge im Bedarfsfall flexibel gestalten zu können und damit das Einsatzgebiet zu vergrößern.

Als Lautsprecher kommt ein Hornreiber zum Einsatz, da dieser hohe Schalldrücke bei kleinen Klirrfaktoren erzeugen kann.

4.1 Dimensionen

Von *NXP* wurde ein messbarer Frequenzbereich von 60Hz bis 20kHz gewünscht. Aus (8) ergibt sich ein maximaler Radius von $R = 1,05\text{cm}$, damit das Wellenfeld im Rohr bis $f = 20\text{kHz}$ eben bleibt. Da der angepasste Fall angestrebt wird, spielt die Rohrlänge im Prinzip keine Rolle, wie in Kapitel 3 gezeigt wurde. Da der ideale angepasste Abschluss in der Praxis kaum realisierbar ist, wird davon ausgegangen, dass das Rohr so lang sein soll, dass sich die benötigten Frequenzen ausbreiten können. Als minimale Länge bekommt

man $\lambda/2 = 2,86\text{m}$.

Das Gesamtrohr soll sich aus mehreren Einzelteilen zusammensetzen, wie in Abbildung 37 veranschaulicht wird. Neben dem Übergangsstück (Länge 3cm) und dem Zwischenstück mit den Mikrofonhalterungen (Länge 5cm) sollen jeweils zwei Rohrteile mit 1m, 0,75m und 0,5m Länge gebaut werden, die einzeln oder alle zusammen diskrete Rohrlängen zwischen 1,08m und 4,58m ergeben. Es wird allerdings empfohlen, eine Gesamtlänge von 2,86m nicht zu unterschreiten, wenn man ab 60Hz messen möchte. Mit den Kombinationsmöglichkeiten hat man die Gelegenheit, ein genügend langes Anfangsstück (zwischen Lautsprecher und Mikrofon) zu wählen, um auftretende Reflexionen von der Lautsprechermembran vom Prüfling klar trennen zu können. Auch ist ein ausreichend großer Abstand zwischen Membran und Mikrofon vorhanden, damit die Nichtlinearitäten, die durch den Lautsprecher erzeugt werden, abklingen. Laut [Fac] sollte dieser Abstand wenigstens dem dreifachen Rohrdurchmesser entsprechen, was selbst mit dem kürzesten Rohrstück erreicht wird, denn der dreifache Rohrdurchmesser sind 6cm. Die genaue Bestellliste befindet sich im Anhang B.4.

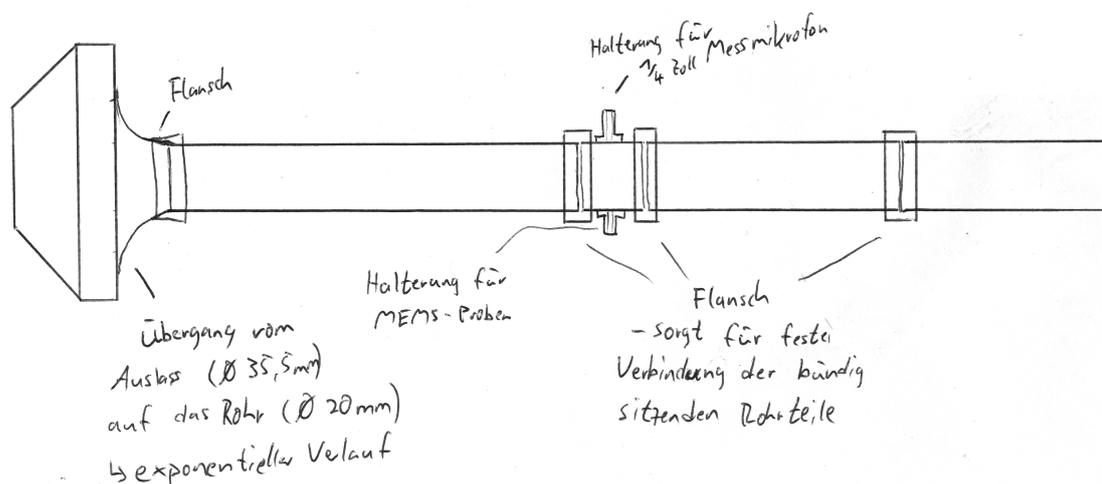


Abbildung 37: Prinzipbild des geplanten Messrohres.

Die Anpassung am Ende des Rohre wird mittels kleinen Absorberstücken erfolgen, die am Ende stark, in Richtung Prüfling immer schwächer komprimiert werden. Geht die Schallwelle langsam in ein absorbierendes Material über, wird der Reflexionsfaktor am Rohrende annähernd Null und der Wert der Schallimpedanz an der Stelle stimmt mit

der Schallkennimpedanz der ebenen Welle überein, was idealer Anpassung entspricht [Mös07]. Als Material für die Rohre wird Plexiglas genommen, welches neben ausreichender Steifheit den Vorteil hat, dass man beim Befüllen des Dämmmaterials sieht, was man tut.

Zum Messaufnahmeteil ist anzumerken, dass die Membran der Messmikrofone bündig mit der Innenfläche des Rohres eingebaut werden muss. Zwischen Einbauöffnung und Mikrofon muss eine Dichtung vorhanden sein, damit kein Schall austreten kann. Die Konstruktion der Flansche und des Messaufnahmeteils wurde der Firma *ADOLF HERZOG GmbH* überlassen, die für die Konstruktion des Rohres nach diesen Vorgaben zuständig war.

4.2 Lautsprecher

Für die Wahl des Lautsprechers, war ziemlich schnell klar, dass ein Horntreiber gewählt werden sollte, um im gewünschten Schallpegelbereich von 140dB messen zu können. Bei Horntreibern besteht oft das Problem, dass die Datenblätter nicht so viele Thiele-Small-Parameter enthalten, wie bei *normalen* Kompaktlautsprechern. Meistens wird aber wenigstens die Wandlerkonstante und der Impedanzverlauf angegeben, so dass man die restlichen Thiele-Small-Parameter abschätzen kann. Nach einigem Suchen wurde bei Firma *eighteensound* ein Horntreiber gefunden, der in die engere Auswahl kam: Der *ND1424BT*. Das Datenblatt ist im Anhang B.2 einsehbar. Die folgenden Thiele-Small-Parameter waren gegeben:

$$R_s = 6\Omega$$

$$\beta = B l = 1,9T$$

Die übrigen wurden auf folgende Werte geschätzt

$$M = 1,5g$$

$$C_{ms} = \frac{1}{s} = 0,76 \frac{mm}{N}$$

$$W = 0,47 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

$$L_s = 0,2\text{mH},$$

so dass sich der in Abbildung 38 gezeigte Impedanzverlauf ergibt. Vergleicht man diesen mit der im Datenblatt angegebenen Impedanzkurve, stellt man fest, dass die Schätzung der Parameter einigermaßen gelungen ist.

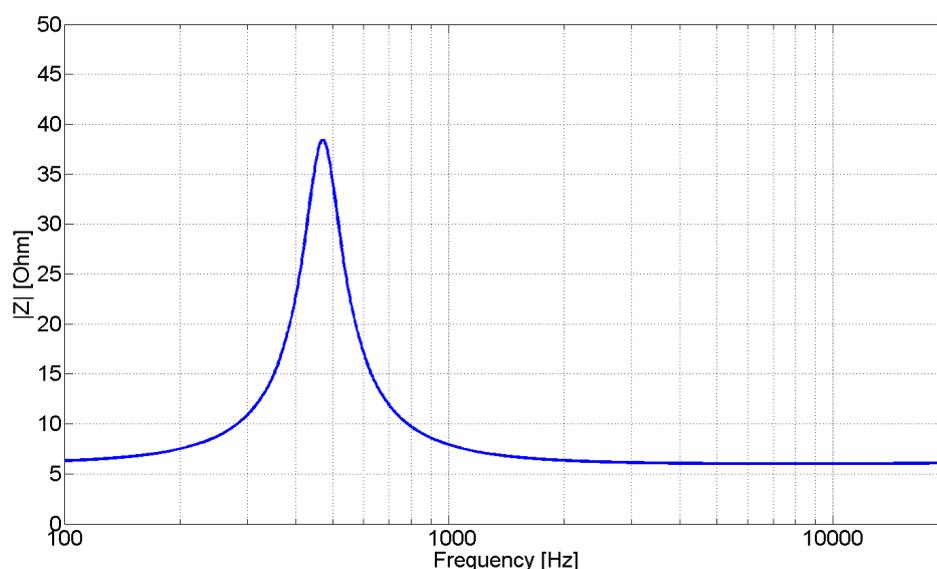


Abbildung 38: Impedanz des Horntriebers *ND1424BT* mit geschätzten Thiele-Small-Parametern.

Die Gesamtimpedanz, wie sie in Abbildung 39 zu betrachten ist, wird hauptsächlich durch die Treiberimpedanz bestimmt. Sie ist nur leicht wellig, weswegen auch ein fast glatter Schalldruckpegelverlauf zu erwarten ist.

Der Schalldruckpegelverlauf wird in Abbildung 40 gezeigt und verläuft für 10V Eingangsspannung zumindest von 160Hz bis 1kHz oberhalb 140dB, was der Anforderung entspricht. Betreibt man den *ND1424BT* mit 16V, erweitert sich dieser Bereich sogar auf 100Hz bis 1,5kHz. Dafür ist allerdings noch die maximale Membranauslenkung zu überprüfen.

Nach einem Telefonat mit *eighteensound* hat sich herausgestellt, dass die maximale Membranauslenkung für diesen Treiber $\pm 0,5$ mm beträgt. Diese Grenze wurde in grün in die Membranauslenkungskurve für eine Eingangsspannung von 12V eingezeichnet, wie

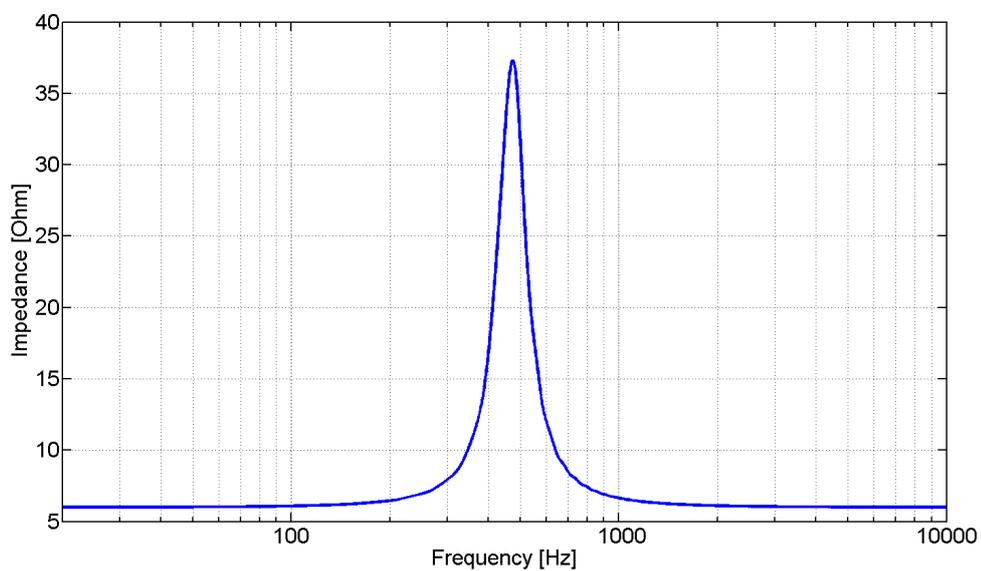


Abbildung 39: Gesamtimpedanz des Messrohres mit $R = 1\text{cm}$ und $R_M = 1\text{cm}$ und dem Horntriebter *ND1424BT*.

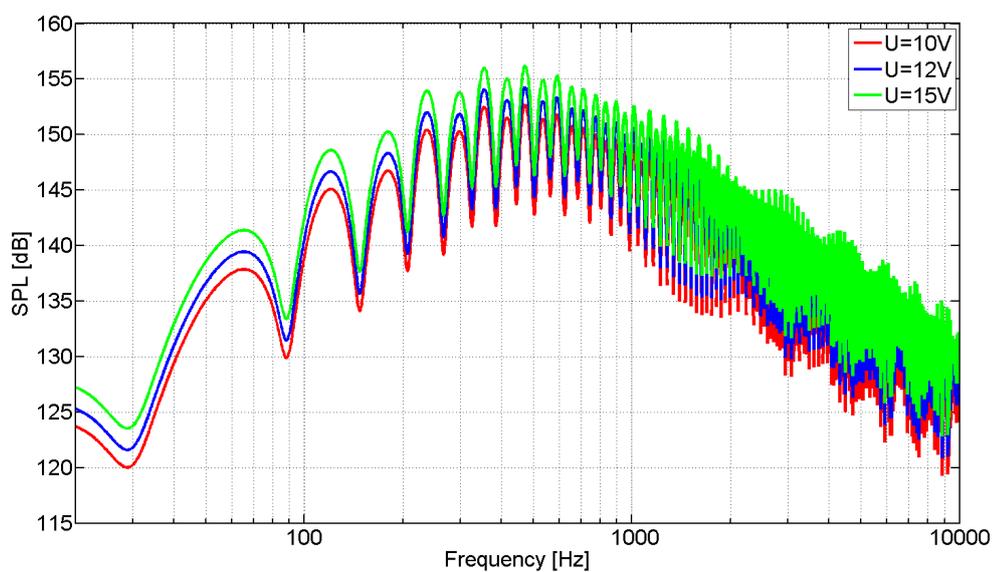


Abbildung 40: Schalldruckpegel im Messrohr mit $R = 1\text{cm}$ und $R_M = 1\text{cm}$ und dem Horntriebter *ND1424BT*.

in Abbildung 41 gezeigt wird. Man sieht, dass bei einer Eingangsspannung von 12V die maximale Membranauslenkung nicht überschritten wird und ein Vergleich mit Abbildung 40 zeigt, dass zwischen 160Hz und 1,1kHz 140dB SPL erreicht werden können.

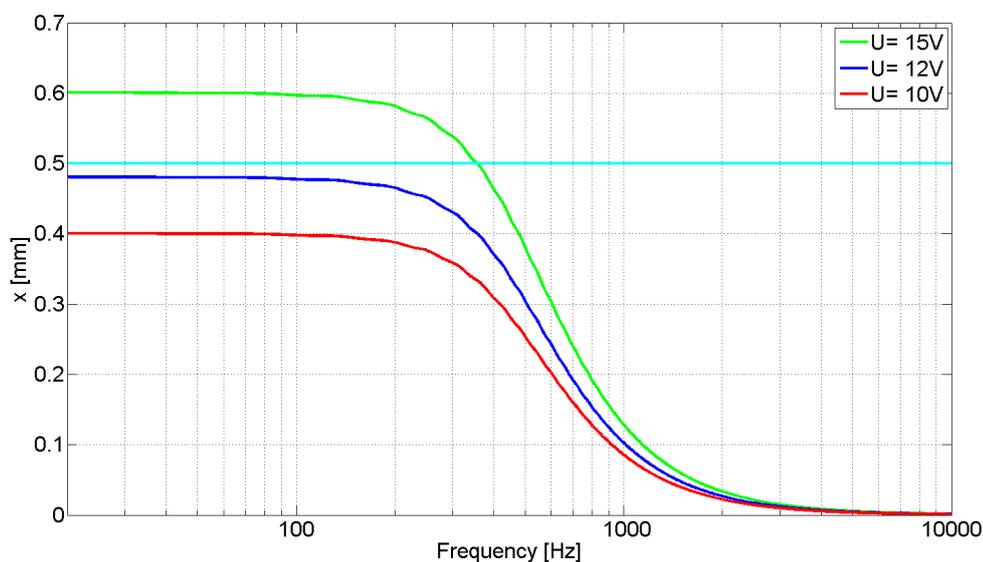


Abbildung 41: Membranauslenkung des Horntreibers *ND1424BT* am Messrohr mit $R = 1\text{cm}$ und $R_M = 1\text{cm}$.

Trotzdem andere Wahl

Um die nötigen Reserven zu haben und doch vielleicht einen größeren Frequenzbereich abdecken zu können, wurde sich dann letztendlich für das größere Modell *ND1460* entschieden, dessen Datenblatt sich im Anhang B.3 befindet. Auch hier mussten die Thiele/Small Parameter aus der Wandlerkonstanten und dem Impedanzverlauf geschätzt werden, so dass sich letztendlich der Datensatz

$$\begin{aligned}
 Bl &= 13,5Tm, & M &= 21g, & C_{ms} &= 4\mu m/N, \\
 W &= 7,2kg/s, & L_s &= 10\mu H & \text{und } R_s &= 6,2\Omega
 \end{aligned}$$

ergeben hat. Der daraus resultierende Impedanzverlauf ist in Abbildung 42 zu betrachten.

Die Gesamtimpedanz des Messsystems wird beim *ND1460*, wie auch schon beim *ND1424BT*,

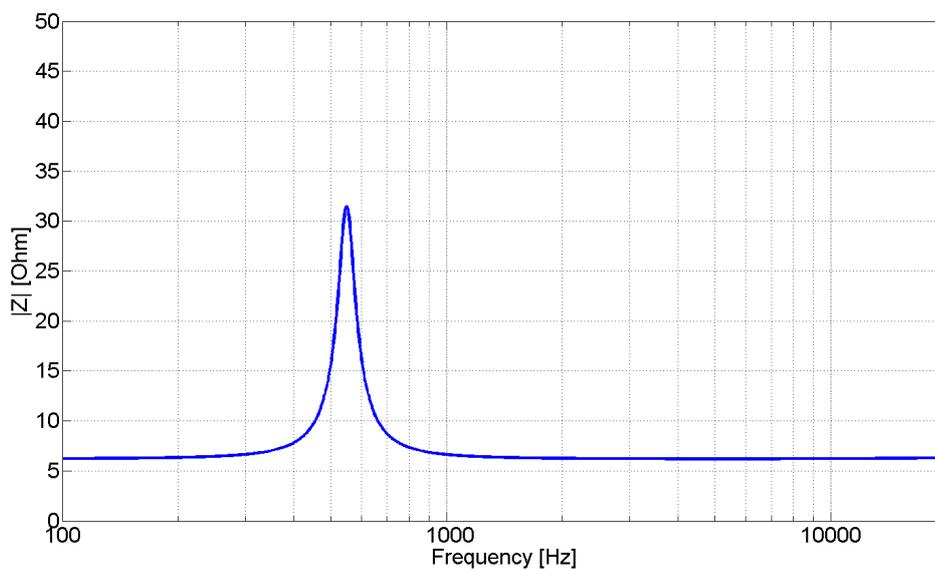


Abbildung 42: Impedanz des Horntriebers *ND1460* mit geschätzten Thiele-Small-Parametern

hauptsächlich durch die Impedanz des Treibers beeinflusst. In Abbildung 43 ist sie dargestellt.

Legt man hohe Spannungen an, um maximalen Schalldruckpegel im Rohr zu erreichen, hat sich der Frequenzbereich, in dem man über 140dB erreicht auf 100Hz bis 2kHz erweitert, wie man in Abbildung 44 erkennen kann.

Überprüft man die Membranauslenkung bei dieser Spannung, stellt man fest, dass die Grenze von $\pm 0,7\text{mm}$ stets eingehalten wird, wie in Abbildung 45 zu sehen ist.

Da alle Zweifel ausgeräumt sind, wird der *ND1460* als Treiber ausgewählt.

4.3 Equipment

Als weiteres Messequipment sollen folgende Geräte benutzt werden: Das Referenzmikrofon ist ein Brüel & Kjær Messmikrofon mit 1/4" Durchmesser. Als Verstärker soll ein HiFi-Verstärker, der von *NXP* gewählt wird, benutzt werden. Ein Standard-PC mit Multiface von *RME* soll zum Abspielen und Aufnehmen dienen.

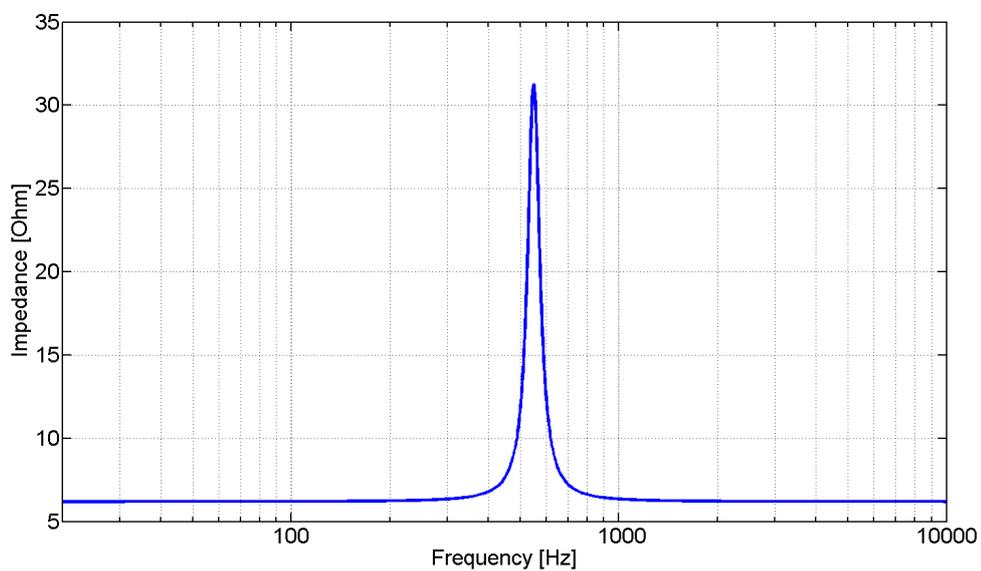


Abbildung 43: Gesamtimpedanz des Messrohres mit $R = 1\text{cm}$ und $R_M = 1\text{cm}$ und dem Horntriebter *ND1460*.

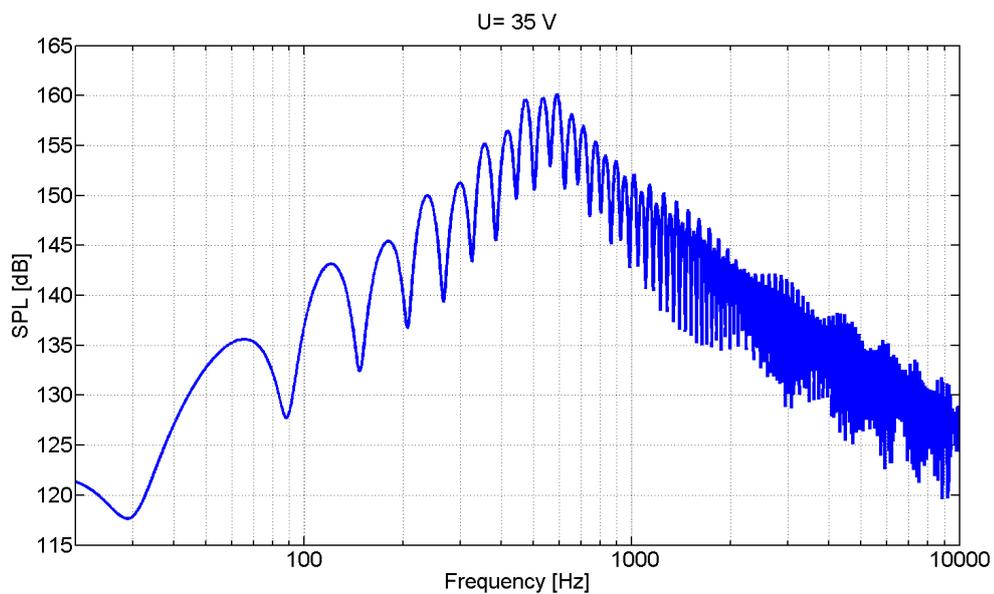


Abbildung 44: Schalldruckpegel im Messrohr mit $R = 1\text{cm}$ und $R_M = 1\text{cm}$ und dem Horntriebter *ND1460*.

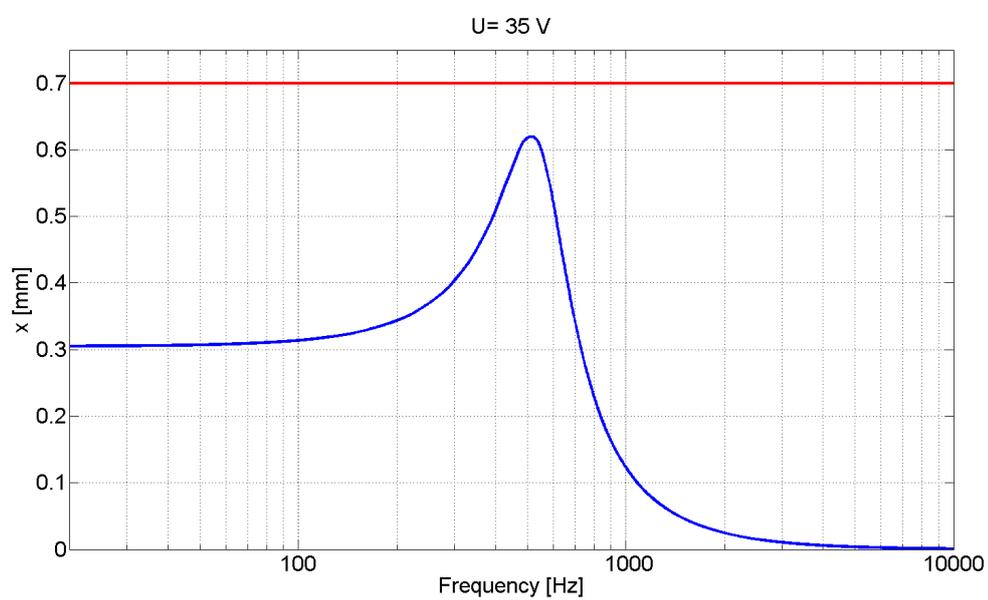


Abbildung 45: Membranauslenkung des Horntreibers *ND1460* am Messrohr mit $R = 1\text{cm}$ und $R_M = 1\text{cm}$ bei 35V Eingangsspannung.

5 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Kapitel werden die wesentlichen Ergebnisse der Diplomarbeit zusammengefasst. Anschließend wird erläutert, welche Problematiken mit einer Weiterführung der Thematik als Nächstes behandelt werden könnten.

5.1 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden Aspekte betrachtet, um das Schallfeld in einem Rohr zu beschreiben. Eine umfassende Literaturstudie hat ergeben, dass die Berücksichtigung eines angeschlossenen Lautsprechers, der über Thiele/Small-Parameter beschrieben wird, eine neue Betrachtungsweise ermöglicht hat. Es wurden Methoden gezeigt, mit denen der Einfluss der Messposition, der Rohrlänge und des Rohrabschlusses auf die Vermessung von Mikrofonen untersucht wurde. Letztendlich wurde gezeigt, wie der Frequenzgang im Rohr an einem Messpunkt verläuft. Eine Untersuchung der Wellenausbreitung hat die Bedingungen ergeben, um unerwünschte Moden im Rohr zu vermeiden.

Die Impedanz des Rohres, die sich bei Bespielung mit einem Lautsprecher ergibt, wurde ebenso ermittelt, wie der resultierende Schalldruckpegel. Schließlich wurden die physikalischen Grenzen des Lautsprechers diskutiert.

Im Rahmen dieser Diplomarbeit ist eine GUI in MATLAB entstanden, mit der die Simulationen durchgeführt wurden.

5.2 Ausblick

Einer der nächsten Schritte sollte sein, die simulierten Ergebnisse mit einem im Messraum erstellten Freifeldfrequenzgang zu vergleichen.

Die Simulation lässt sich erweitern, indem die Beugung am Messobjekt untersucht wird. Die in dieser Arbeit vorgestellten Methoden sollten sich hierfür auf eine Betrachtung des Messobjektes anwenden lassen.

Die Untersuchung von Schallfeldern im Rohr mit einem Mikrofonarray könnte Hinwei-

se auf eventuell auftretende Partialschwingungen der Lautsprechermembran und deren Auswirkungen auf das Schallfeld ergeben. Ebenso sollte das verlustfreie Modell auf Verlustlosigkeit überprüft und im Bedarfsfall erweitert werden.

Schließlich ist die Reflexion an der Membran zu untersuchen. Da dies eine Reflexion am bewegten Objekt ist, wird man dabei zumindest den Doppler-Effekt in Betracht ziehen müssen.

6 Danksagung

Allen voran möchte ich mich bei meinen Eltern für sämtliche Unterstützung während meiner Studienzeit bedanken. Ich danke euch dafür, dass ihr mir dieses Studium ermöglicht habt.

Besonders bedanke ich mich bei Kathrin für ihre Liebe und ihr Verständnis, dass das Studium viel zu oft Vorrang hatte.

Herzlichen Dank möchte ich meinem Betreuer Franz Zotter aussprechen. Mit seiner motivierenden Art und seinem immer offenen Ohr für Fragen und Diskussionen hat er mir gezeigt, was eine wirklich gute Betreuung ausmacht.

Der Firma *NXP* möchte ich für das Interesse und die Mitwirkung an diesem Thema Dank sagen.

Ich danke meinen Freunden und meiner Familie für eine wunderbare Studienzeit!

A Anhang A - Herleitungen

In diesem Anhang befinden sich die Herleitungen und Beschreibungen der höheren Funktionen, die zur Schallfeldberechnung im Messrohr benutzt wurden.

A.1 Herleitung der Wellengleichung

Schallwellen bewirken in elastischen Medien wie Gasen oder Flüssigkeiten eine Teilchenbewegung. Diese Teilchenbewegung wirkt sich mit einer Verschiebung der angrenzenden Teilchen aus, welche wiederum deren Nachbarpartikel verschieben. Dies geht so weiter, so dass sich die Schallwelle als fortschreitende Welle ausbreitet. Die Geschwindigkeit der Ortsänderung eines Teilchens wird als Schnelle v bezeichnet. Die sich ergebende örtliche Dichteänderung im Medium heißt Schalldruck p und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Medium ist die Schallgeschwindigkeit c . Die theoretische Beschreibung des Schallfeldes geschieht über drei Grundgleichungen, die sich aus den physikalischen Grundgesetzen ergeben. Die Überlegungen in diesem Kapitel basieren weitgehend auf der Herleitung in [ZZ93].

Adiabatische Zustandsgleichung des idealen Gases

Bei Luftschallwellen erfolgen die Zustandsänderungen so schnell, dass die Änderungen der Lufttemperatur nicht mit der Umgebung ausgeglichen werden. Diesen Vorgang nennt man adiabatisch. Daraus ergibt sich als erste Grundgleichung die Poissonsche Gleichung

$$pV^\kappa = \text{const}$$

oder

$$(p + \Delta p) (V - \Delta V)^\kappa = pV^\kappa$$

mit V : Volumen und κ : Adiabatenexponent ($\kappa = \frac{c_p}{c_v} \approx 1,4$ für Luft). Für sehr kleine Änderungen $\Delta p \ll p$ und $\Delta V \ll V$ folgt näherungsweise

$$\left(1 + \frac{\Delta p}{p}\right) p \left(1 - \kappa \frac{\Delta V}{V}\right) V^\kappa \approx p V^\kappa.$$

Multipliziert man die Klammern aus und dividiert durch p und durch V^κ erhält man

$$\frac{\Delta p}{p} - \kappa \frac{\Delta p}{p} \frac{\Delta V}{V^\kappa} - \kappa \frac{\Delta V}{V^\kappa} \approx 0.$$

Da Δp ΔV sehr klein ist, kann man dieses Produkt vernachlässigen, so dass sich

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta V}{V^\kappa} = \kappa \frac{\Delta \rho}{\rho=}$$

mit ρ : Dichte und $\rho=$: Ruhedichte (ohne Beschallung) ergibt. Mit dem aus der Thermodynamik bekannten Gesetz

$$\sqrt{\kappa R_s T} = \sqrt{\kappa T \frac{R}{m_M}} = c = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho=}}$$

mit m_M als relative Molekülmasse ergibt sich

$$\Delta p = c^2 \Delta \rho.$$

Aus dieser Gleichung erkennt man, dass die Beträge der maximalen Druckänderungen und der maximalen Dichteänderungen proportional zueinander sind, wobei die Richtung identisch ist.

Die Eulersche Bewegungsgleichung

Die zweite Grundgleichung leitet sich aus dem zweiten Newtonschen Axiom

$$F = m \frac{dv}{dt}$$

ab. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird dabei die Masse eines kleinen Würfels betrachtet, die sich zu $m = \rho dx dy dz$ ergibt. Statt der Kraft rechnet man mit örtlichen Druckdifferenzen, wie in Abbildung 46 gezeigt, so dass für die x-Richtung

$$p(x + dx) = p(x) + \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

folgt. Dies lässt sich umformen zu

$$p(x + dx) - p(x) = \frac{\partial p}{\partial x} dx = -\rho dx \frac{\partial v_x}{\partial t},$$

so dass sich analog für alle drei Richtungen

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \frac{\partial v_x}{\partial t}, \quad -\frac{\partial p}{\partial y} = \rho \frac{\partial v_y}{\partial t}, \quad -\frac{\partial p}{\partial z} = \rho \frac{\partial v_z}{\partial t}$$

ergibt. In vektorieller Schreibweise lässt sich das als

$$-\text{grad } p = \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

ausdrücken und wird Eulersche Bewegungsgleichung genannt. Sie besagt, dass die Beträge von maximaler Druckänderung und der Beschleunigung proportional zueinander und die Richtungen entgegengesetzt sind.

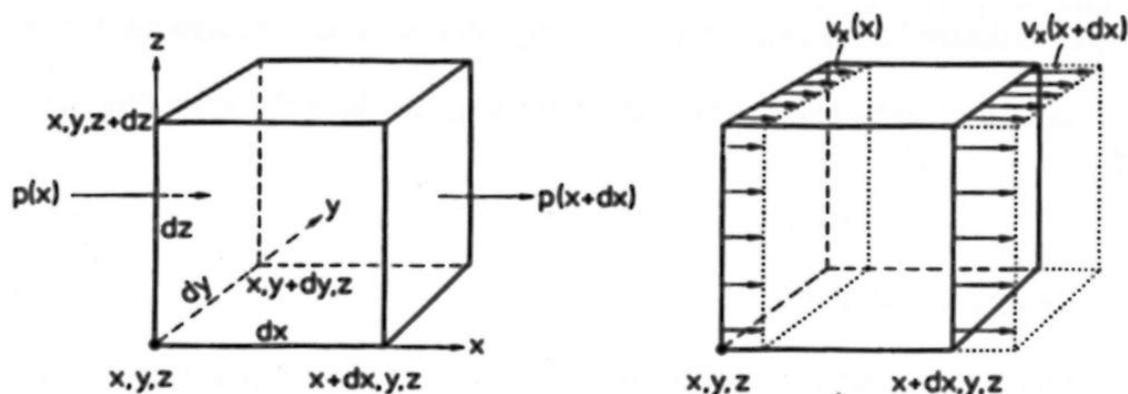


Abbildung 46: Elementarteilchen [ZZ93].

Die Kontinuitätsgleichung

Das Gesetz der Stetigkeit und der Masseerhaltung sagt aus, dass im Volumenelement $dx \, dy \, dz$ die Massezunahme $\frac{\partial m}{\partial t}$ dem Nettozufluß durch die Begrenzungsflächen entspricht. Betrachtet man dies für ein Elementarteilchen, wie in Abbildung 46 gezeigt, folgt

zunächst für die x-Richtung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial t} &= \underbrace{\rho(x) v_x(x) dy dz}_{\text{Zufluß}} - \underbrace{\rho(x+dx) v_x(x+dx) dy dz}_{\text{Abfluß}} \\ &= [\rho(x) v_x(x) - \rho(x+dx) v_x(x+dx)] dy dz \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} [\rho(x) v_x(x)] dx dy dz \quad \text{mit} \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad \text{vernachlässigbar klein.} \end{aligned}$$

Mit $m = \rho dx dy dz$ ergibt sich daraus für die x-Richtung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [\rho(x) v_x(x)]$$

und näherungsweise für kleine Amplituden folgt analog für alle drei Raumrichtungen

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \rho}{\partial t},$$

beziehungsweise in vektorieller Schreibweise

$$\rho \operatorname{div} \vec{v} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

als dritte Grundgleichung. Sie sagt aus, dass die Quellendichte des Schallfeldes proportional zu der zeitlichen Dichteänderung ist.

Aufstellen der Wellengleichung

Die drei Grundgleichungen werden ineinander eingesetzt, um die Wellengleichung aufzustellen. Einsetzen der Adiabatengleichung in die Kontinuitätsgleichung und Division durch ρ liefert

$$\operatorname{div} \vec{v} = -\frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial t}.$$

Leitet man diese Gleichung nach t ab und setzt die Eulersche Bewegungsgleichung ein, erhält man als homogene und zeitabhängige Wellengleichung

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2},$$

oder ausgeschrieben

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}.$$

Diese Gleichung beschreibt die zeitliche und räumliche Abhängigkeit des Schalldruckes, weshalb sie für die jeweiligen Szenarien gelöst werden muss. Da eine exakte Lösung nur in den einfachsten Fällen möglich ist, gibt es oft nur Näherungslösungen, weil in komplizierteren Fällen nicht alle Randbedingungen erfasst werden können.

Harmonische Schwingungen

Für harmonische Schwingungen, von denen hier ausgegangen wird, lässt sich der Schalldruck als

$$p(r, \phi, z, t) = p(r, \phi, z) e^{j\omega t}$$

ausdrücken und nach Division durch $e^{j\omega t}$ vereinfacht sich die verlustlose, lineare Wellengleichung zur Helmholtzgleichung [ZZ93]

$$(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2})p(r, \phi, z) = 0.$$

Wellenzahl

Die Wellenzahl k gibt an, wie viele Wellenlängen λ auf die Strecke 2π entfallen. Mit ihrer Definition

$$k \equiv \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

erhält man für die Helmholtzgleichung

$$(\nabla^2 + k^2)p(r, \phi, z) = 0.$$

A.2 Zylinderkoordinaten

In der Mathematik versteht man unter einem Polarkoordinatensystem ein zweidimensionales Koordinatensystem, in dem jeder Punkt auf einer Ebene durch einen Winkel ϕ und einen Abstand r definiert wird. Zylinderkoordinaten sind im wesentlichen ebene Polarkoordinaten, die um eine dritte Koordinate ergänzt sind. Diese dritte Koordinate

beschreibt die Höhe eines Punktes senkrecht über (oder unter) der Ebene des Polarkoordinatensystems und wird im Allgemeinen mit z bezeichnet. In Abbildung 47 wird das Zylinderkoordinatensystem gezeigt, das in dieser Arbeit als Bezugssystem verwendet wird. Die Umrechnung von kartesischen auf Zylinderkoordinaten erfolgt nach diesen Formeln:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\phi) \\ r \sin(\phi) \\ z \end{pmatrix}.$$

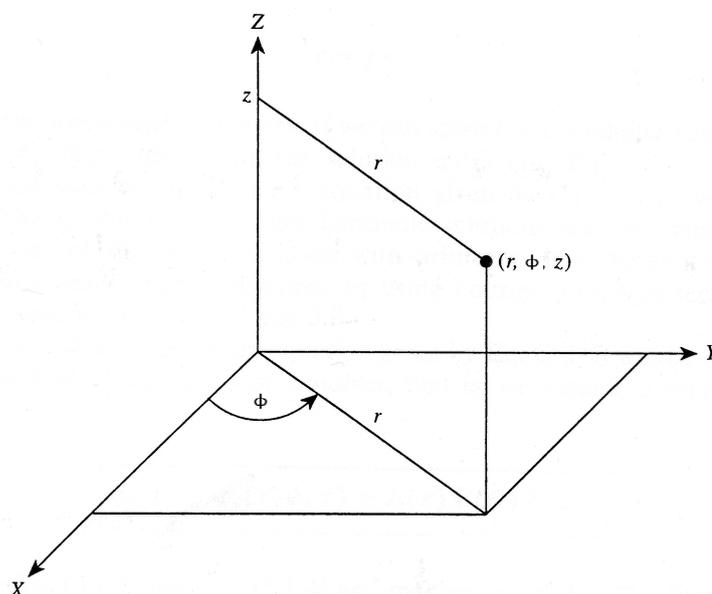


Abbildung 47: Zylinderkoordinatensystem [Zio95].

In Zylinderkoordinaten wird der Laplace Operator als

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

der Gradient als

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \vec{e}_\phi + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$$

ausgedrückt. Die Einheitsvektoren zeigen dabei in die positive Richtung des Koordinatensystems [Wil99], [Zio95].

A.3 Radialer Zusammenhang zwischen Druck und Schnelle

Die Eulersche Bewegungsgleichung für harmonische Größen in Zylinderkoordinaten lautet

$$-\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{v}(r, \phi, z) e^{j\omega t} = \vec{\nabla} p(r, \phi, z) e^{j\omega t}.$$

Drückt man die Schnelle als Vektor $v = \begin{pmatrix} v_r \\ v_\phi \\ v_z \end{pmatrix}$ aus, erhält man

$$-\rho_0 j\omega \begin{pmatrix} v_r \\ v_\phi \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} p(r, \phi, z).$$

Insbesondere für die radiale Komponente ergibt sich daraus

$$-\rho_0 j\omega v_r = \frac{\partial}{\partial r} p(r, \phi, z).$$

A.4 Closure Equation

Die *closure equation* ist die Orthogonalitätsbeziehung zwischen Bessel-Funktionen für unendlichen Integrationsbereich. Sie lautet [Wik10b]:

$$\int_0^\infty x J_\alpha(ux) J_\alpha(vx) dx = \frac{1}{u} \delta(u - v) \quad \text{mit} \quad \alpha > -\frac{1}{2}$$

und δ als der Dirac-Funktion.

Herleitung der Koeffizienten für Kapitel 2.4

Bildet man nun das Integral

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} J_0(vr)g(r)r \, dr &= \int_0^{\infty} J_0(vr) \int_0^{\infty} \gamma_u J_0(ru) \, du r \, dr \\
 &= \int_0^{\infty} \gamma_u \underbrace{\int_0^{\infty} J_0(vr)J_0(ru) \, dr r}_{\frac{1}{v}\delta(u-v)} \, du \\
 &= \int_0^{\infty} \gamma_u \frac{1}{v} \delta(u-v) \, du \\
 &= \frac{1}{v} \gamma(v),
 \end{aligned}$$

folgt daraus

$$\gamma(v) = v \int_0^{\infty} J_0(vr)g(r) \, r \, dr.$$

Herleitung der Kraft an der Membran

Es sei

$$a(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k J_0(k_{r_k} r) \stackrel{!}{=} \begin{cases} 1 & r \leq R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$F = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} a(r)p(r, \phi, 0)r \, dr \, d\phi.$$

Dann folgt daraus mit Hilfe der *closure equation*:

$$\begin{aligned}
F &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k J_0(k_{r_k} r) \right] \left[\sum_{l=0}^{\infty} \gamma_l \frac{\omega \rho_0}{k_z} J_0(k_{r_l} r) \right] r \, dr \, d\phi \\
&= 2\pi \int_{r=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k J_0(k_{r_k} r) \right] \left[\sum_{l=0}^{\infty} \gamma_l \frac{\omega \rho_0}{k_z} J_0(k_{r_l} r) \right] r \, dr \\
&= 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \gamma_k \gamma_l \frac{\omega \rho_0}{k_z} \underbrace{\int_{r=0}^{\infty} J_0(k_{r_k} r) J_0(k_{r_l} r) r \, dr}_{= \frac{1}{k_{r_l}} \delta(k_{r_l} - k_{r_k})} \\
&= 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (\gamma_l)^2 \frac{\omega \rho_0}{k_z k_{r_l}} \delta(k_{r_l} - k_{r_k}) \\
&= 2\pi \frac{\omega \rho_0}{k_z} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\gamma_l)^2}{k_{r_l}}.
\end{aligned}$$

A.5 Ausbreitungsterm im eingeschwungenen Zustand

Beim Aufstellen der Regelgleichungen für den in Abbildung 18 gezeigten Regelkreis ergeben sich folgende Gleichungen:

$$y(z) = y_h(z) + y_r(z),$$

$$y_r(z) = y(L) r_1 H(L - z),$$

$$y_h(z) = x(z) H(z),$$

$$y(L) = R x(z),$$

$$x(z) = x'(z) + r_2 w(z) \quad \text{und}$$

$$w(z) = R r_1 y(L).$$

Durch Einsetzen folgt:

$$\begin{aligned} x(z) &= x'(z) + r_1 r_2 R y(L) \\ &= x'(z) + r_1 r_2 R^2 x(z) \\ &= \frac{x'(z)}{1 - r_1 r_2 R^2} \quad \text{und} \end{aligned}$$

$$y(L) = \frac{R x'(z)}{1 - r_1 r_2 R^2}.$$

Als Überlagerung am Abgriffspunkt erhält man daraus:

$$\begin{aligned} y(z) &= y(L) r_1 H(L - z) + x(z) H(z) \\ &= \frac{r_1 R H(L - z) + H(z)}{1 - r_1 r_2 R^2} x'(z). \end{aligned}$$

$H(z)$ ist dabei die Exponentialfunktion, welche die Ausbreitung des Schalldruckes in z -Richtung beschreibt, daher folgt

$$H(z) = e^{-jk_z z}.$$

Setzt man $H(z)$ in die oben gebildete Summe ein, erhält man als Ausbreitungsterm für das Messrohr

$$\Gamma(z) = \frac{r_1 e^{-jk_z(2L-z)} + e^{-jk_z z}}{1 - r_1 r_2 e^{-j2k_z L}}.$$

A.6 Dynamischer Wandler

Der dynamische Wandler basiert, wie in Abbildung 48 dargestellt, auf einem Magnetfeld mit der Induktion B . Die Lorentz-Kraft

$$F = B l I$$

ist die Kraft, die auf einen stromdurchflossenen Leiter der Länge l einwirkt. Dabei stehen die Richtungen von Kraft, Strom und Magnetfeld senkrecht aufeinander. Das Induktionsgesetz

$$U = B l v$$

liefert die Spannung, die bei Bewegung des Leiters induziert wird. Die Wandlerkonstante ergibt sich zu [ZZ93]

$$\beta = B l.$$

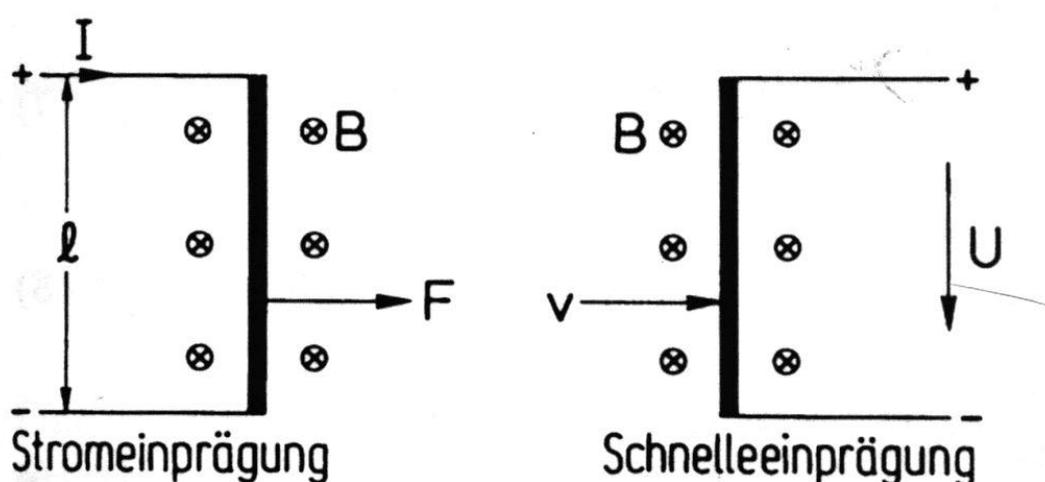


Abbildung 48: Prinzip vom dynamischen Wandler [ZZ93].

Das mechanische Ersatzschaltbild eines dynamischen Lautsprechers ist in Abbildung 49 (oben) zu sehen. Dabei wird die Membran durch Membranmasse m , Membransteifigkeit s und Reibwiderstand W beschrieben. Der dynamische Wandler wird durch die Wandlerkonstante β charakterisiert und die Schwingspule lässt sich durch den elektrischen Widerstand R_s und die Induktivität L_s ausdrücken. Mit Hilfe elektromechanischer Entsprechungen lassen sich die mechanischen Parameter in die elektrische Domäne transferieren, um sich gewisse Zusammenhänge besser vorstellen zu können. Benutzt man die FI-Analogie, ergibt sich das elektrische Ersatzschaltbild, wie es in Abbildung 49 (unten) gezeigt wird. Der Vorteil dieser Umrechnung liegt darin, dass man Schwingkreise, die Resonanzen verursachen besser erkennen kann. Der Nachteil daran ist, dass man mit Größen rechnet, die physikalisch so gar nicht vorkommen. Daher wird hier versucht,

möglichst lang dicht am physikalischen Fall zu bleiben.

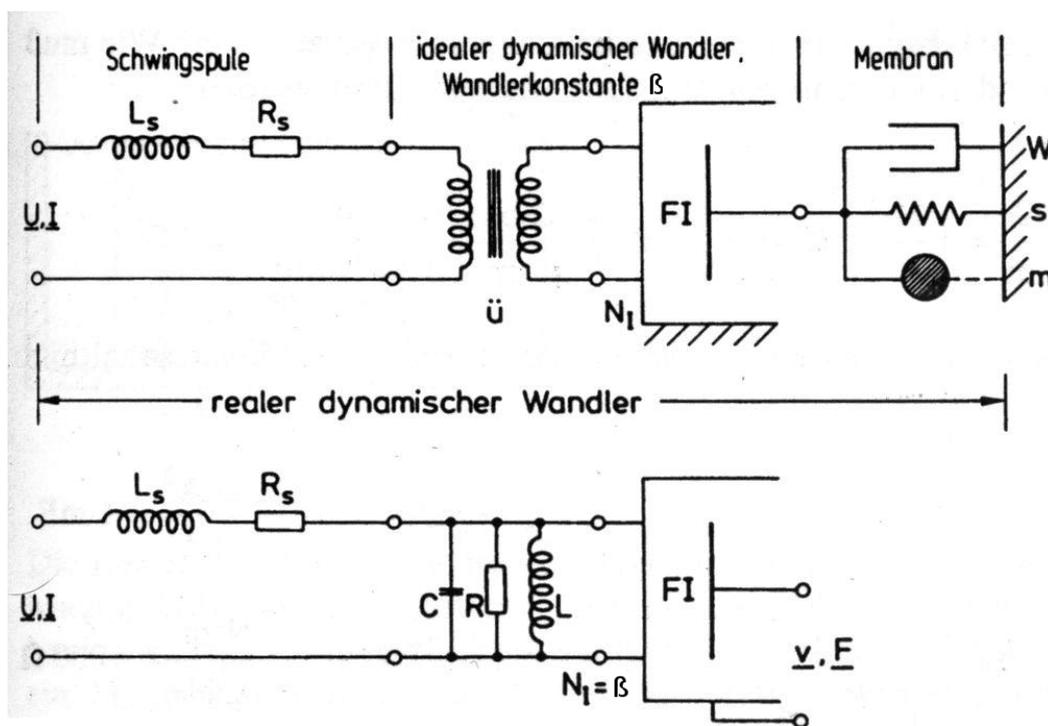


Abbildung 49: Ersatzschaltbild vom dynamischem Lautsprecher vor (oben) und nach (unten) nach Transformation der mechanischen Elemente in elektrische [ZZ93].

A.7 Umrechnung mechanischer Elemente in elektrische beim FI-Wandler

Die FI-Analogie liefert als Wandlergleichung

$$\begin{pmatrix} U \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \frac{1}{\beta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ v \end{pmatrix},$$

so dass sich daraus für die Transformation der mechanischen Elemente in elektrische

$$j\omega M = Z_{mechanisch} = \frac{F}{v} = \frac{I\beta}{\frac{U}{\beta}} = \frac{\beta^2}{\frac{U}{I}} = \frac{\beta^2}{Z_{elektrisch}} = \beta^2 j\omega C$$

ergibt. Daraus folgt

$$C = \frac{M}{\beta^2}$$

und analog

$$L = \frac{\beta^2}{s} = \beta^2 C_{ms}$$

und

$$R = \frac{\beta^2}{W}.$$

Die elektrische Eingangsimpedanz ergibt sich damit zu

$$Z = j\omega L_s + R_s + \frac{1}{j\omega C + \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L}}.$$

B Anhang B - Datenblätter

In diesem Anhang befinden sich die Datenblätter der verwendeten Lautsprecher.

B.1 Datenblatt des Visaton W 100 S

W 100 S 4 OHM

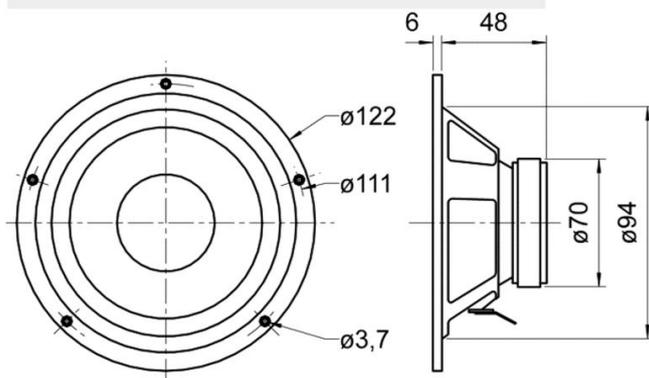
[Bestellen](#)

Art. No. 9020

10 cm (4") HiFi-Tiefmitteltöner mit beschichteter Papiermembran, elastischer Gummisicke und temperaturstabiler 20-mm-Schwingspule. Einsetzbar als Tieftöner in Miniboxen und durch sehr ausgeglichenen [Frequenzgang](#) besonders als Tiefmitteltöner in 3-Wege-Boxen und Satellitensystemen für Subwoofer-Anlagen geeignet.

Gehäuseempfehlungen:

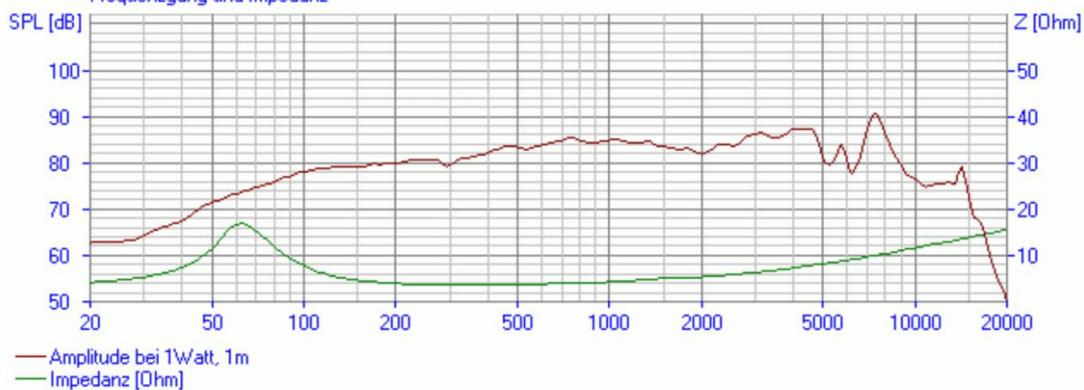
Volumen/Prinzip	BR-Rohr	f_b	f_c/QTC
4 l/geschlossen	-	-	100 Hz/0,7
5 l/Bassreflex	BR 6.8 (6 cm lang)	70 Hz	-
10 l/Bassreflex	BR 6.8 (5 cm lang)	56 Hz	-



W 100 S
29.05.1998

Visaton W 100 S - 4 Ohm

Frequenzgang und Impedanz



Technische Daten:	
Nennbelastbarkeit	30 W
Musikbelastbarkeit	50 W
Nennimpedanz Z	4 Ohm
Übertragungsbereich (-10 dB)	f_u –15000 Hz
(f_u : untere Grenzfrequenz abhängig vom Gehäuse)	.
Mittlerer Schalldruckpegel	86 dB (1 W/1 m)
Abstrahlwinkel (-6 dB)	86°/4000 Hz
Grenzauslenkung	+/-4 mm
Resonanzfrequenz f_s	66 Hz
Magnetische Induktion	1 T
Magnetischer Fluss	250 μ Wb
Obere Polplattenhöhe	4 mm
Schwingspulendurchmesser	20 mm
Wickelhöhe	8 mm
Schallwandöffnung	94 mm
Gewicht netto	0,49 kg
Gleichstromwiderstand R_{dc}	3,3 Ohm
Mechanischer Q-Faktor Q_{ms}	2,45
Elektrischer Q-Faktor Q_{es}	0,61
Gesamt-Q-Faktor Q_{ts}	0,49
Äquivalentes Luftnachgiebigkeitsvolumen V_{as}	5,5 l
Effektive Membranfläche S_d	53 cm ²
Dynamische bewegte Masse M_{ms}	4,2 g
Antriebsfaktor B_{xl}	3,1 Tm
Schwingspuleninduktivität L	0,5 mH

B.2 Datenblatt des ND1424BT von *eighteensound*

ND1424BT

Key Features

- 109 dB 1W / 1m average sensitivity
- 1,4 inch exit throat
- 2,4 inch edgewound aluminum voice coil
- 140 W program power handling
- Pure Titanium diaphragm assembly
- Proprietary phase plug design
- Excellent thermal exchange
- Neodymium magnetic structure

Neo High Frequency Driver



General Description

The ND1424BT 1.4" exit neodymium high frequency compression driver has been designed for high level sound systems application.

The titanium diaphragm is produced in house and has been developed to assure unmatched transient response. A proprietary treated Nomex bended former edge-wound aluminum 60mm voice coil completes diaphragm assembly. It has been made joining the proprietary treated Nomex former directly to the titanium dome through its upper bend edge. In comparison with usual straight former joint, the driver design assures extended frequency energy transfer for improved response linearity and unparallel reliability. This feature allows to keep proper motion control of the dome in real working conditions. Thanks to its physical properties, the proprietary treated Nomex former shows 30% higher value of tensile elongation at working operative temperature (200°C) when compared to Kapton. Moreover, this material is suitable to work also in higher moisture contents environments.

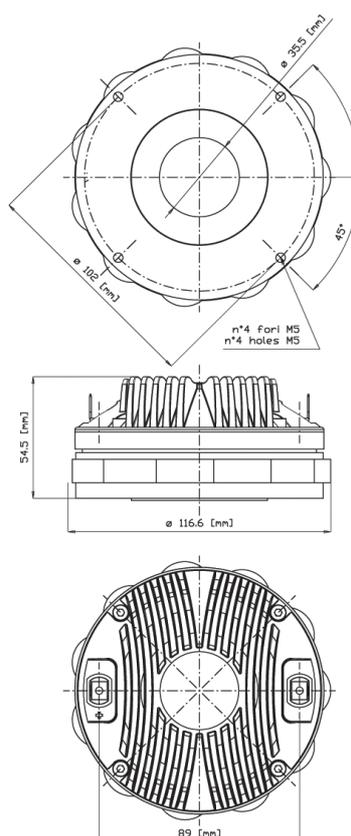
Equipped with Proprietary Phase Plug 3P architecture, the ND1424BT has been designed to give smooth coherent wavefront in the horn entrance in all working frequency range and high level manufacturing consistency. The phase plug with its short openings and high flare rate value assures low distortion and remarkable improvements in mid-high frequency reproduction.

Another big innovation in ND1424BT consists in the magnetic complex architecture. Through careful use of elementary pieces of neodymium magnets, Eighteen Sound engineers have developed a powerful neodymium magnet assembly able to reach 19KGauss in the gap in compact and lightweight structure. The motor structure, throughout the precisely coherent phase plug with 3 circumferential slots and copper ring on the pole piece, reduces inductance effects and distortion.

The custom designed O-ring creates a tight seal between the plate and the cover assuring air chamber loading.

Excellent heat dissipation and thermal exchange are guaranteed by the direct contact between the magnetic structure and the aluminum cover that allows to obtain a lower power compression value.

0422T8M900 8ohm
0422T6M900 16ohm



NEODYMIUM HF DRIVERS

info@eighteensound.com
www.eighteensound.com



ND1424BT

Neo High Frequency Driver

NEODYMIUM HF DRIVERS

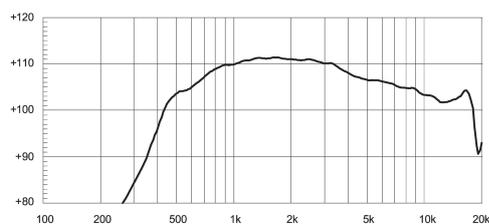
GENERAL SPECIFICATIONS

THROAT DIAMETER	35,5 mm (1,4 in)
RATED IMPEDANCE	8 ohm
DC RESISTANCE	6 ohm
MINIMUM IMPEDANCE	8 ohm at 3000 Hz
AES POWER (1)	70 W above 1,2 kHz
PROGRAM POWER (2)	140 W above 1,2 kHz
SENSITIVITY (1W@1M) (3)	109 dB
FREQUENCY RANGE	800 Hz ÷ 20 kHz
RECOMM. XOVER FREQUENCY	above 1200 Hz (12 dB/octave)
DIAPHRAGM MATERIAL	Titanium
VOICE COIL DIAMETER	60,6 mm (2,40 in)
VOICE COIL WINDING MATERIAL	Edge-wound aluminum
MAGNET MATERIAL	Neodymium
FLUX DENSITY	1,9 T
BL FACTOR	10,5 N/A
POLARITY	Positive voltage on red terminal gives positive pressure in the throat

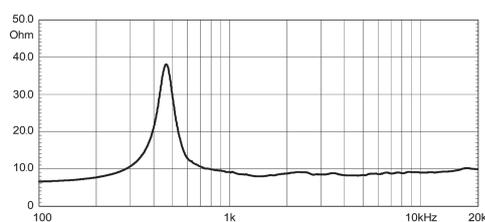
MOUNTING INFORMATIONS

Overall diameter	116,6 mm (4,59 in)
Mounting holes diameter	4 M6 holes 90° at Ø102 mm (4 in)
Bolt circle diameter	102mm (4 in)
Total depth	54,5 mm (2,15 in)
Net weight	1,7 Kg (3,70 lb)
Shipping weight	1,9 Kg (4,20 lb)
CardBoard Packaging dimensions	132x132x68 mm (5,2x5,2x2,7 in)

ND1424BT MEASURED WITH 1W INPUT ON RATED IMPEDANCE AT 1 M DISTANCE ON AXIS FROM THE MOUTH OF XT1464 HORN



FREE AIR IMPEDANCE MAGNITUDE CURVE



NOTES

- (1) AES power rating is tested with a pink noise input having a 6 dB crest factor for two hours duration within the specified range. Power calculated on minimum impedance.
- (2) Program power rating is defined as 3 dB greater than AES rating, and is a conservative expression of the transducer ability to handle music program material.
- (3) Sensitivity is measured at 1W input on rated impedance at 1m on axis from the mouth of XT1464 horn, averaged between 1kHz and 4 kHz.

Eighteen Sound engages in research and product improvement. New materials and design refinements can be introduced into existing products without notice.



B.3 Datenblatt des ND1460 von *eighteensound*

ND1460

Key Features

- 109 dB 1W / 1m average sensitivity
- 1,4 inch exit throat
- 3 inch edgewound aluminum voice coil
- 200 W continuous program power handling
- Pure Titanium diaphragm assembly
- Neodymium magnetic structure
- Excellent thermal exchange

Neo High Frequency Driver



General Description

The ND1460 1.4 inch exit neodymium high frequency compression driver has been designed for use in high quality sound systems.

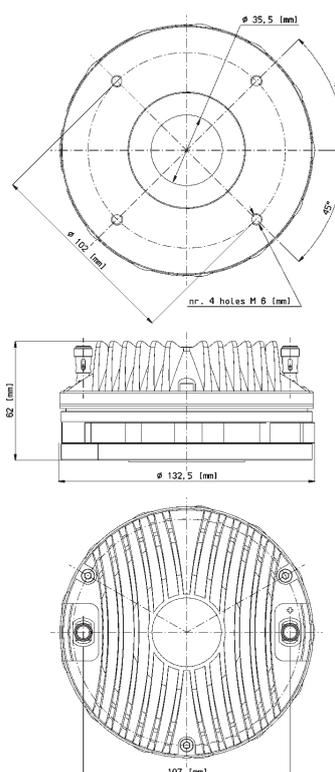
The pure titanium diaphragm is produced in house and has been developed to assure unmatched transient response. The diaphragm assembly is made by joining the former directly to the titanium dome using its upper bend edge. In comparison with a usual straight former joint, the driver design assures extended frequency energy transfer giving improved response linearity and unparallel reliability. This feature facilitates proper motion control of the dome in real working conditions. A proprietary treated Nomex former is used as Nomex shows a 30% higher value of tensile elongation at a working operative temperature (200°C) when compared to Kapton. Moreover, this proprietary former material is also suitable for use in high moisture content environments.

By carefully using elementary pieces of neodymium magnets, Eighteen Sound engineers have developed a powerful neodymium magnet assembly capable of reaching 19KGauss in the gap in compact and lightweight structures. The motor structure, throughout the precisely coherent phase plug with 3 circumferential slots and copper ring on the pole piece, reduces inductance effects and distortion. Four top plate air ducts have been designed to act as a loading chamber for the diaphragm, implementing mid band distortion and response figures.

The custom designed O-ring creates a tight seal between the plate and the cover assuring air chamber loading. Excellent heat dissipation and thermal exchange are guaranteed by the direct contact between the magnetic structure and the aluminum cover which leads to a lower power compression value.

The ability of equipment to perform properly under inclement weather conditions is a key feature of the Eighteen Sound philosophy. Hence, a special treatment is applied to the magnet and the top and back plates of the magnetic structure which increases the ND1460 resistance to the corrosive effects of salts and oxidization. This treatment is more effective than any other treatment in use today.

0422T6N600 160hm
042108N200 80hm



NEODYMIUM HF DRIVERS

info@eighteensound.com
www.eighteensound.com



ND1460

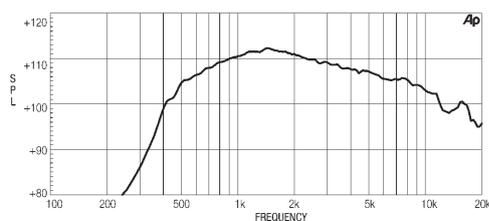
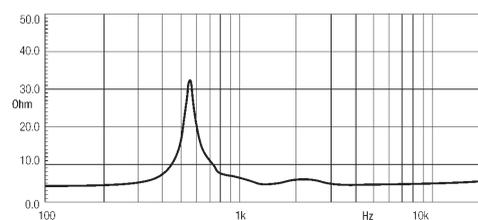
Neo High Frequency Driver

NEODYMIUM HF DRIVERS**GENERAL SPECIFICATIONS**

THROAT DIAMETER	35,5 mm (1,4 in)
RATED IMPEDANCE	8 ohm
DC RESISTANCE	6,2 ohm
MINIMUM IMPEDANCE	8 ohm at 3500 Hz
LE (AT 1KHZ)	124 µH
AES POWER (1)	100 W above 1,2 kHz
PROGRAM POWER (2)	200 W above 1,2 kHz
SENSITIVITY (1W@1M) (3)	109 dB
FREQUENCY RANGE	500 Hz ÷ 20 kHz
RECOMM. XOVER FREQUENCY	above 800 Hz (12 dB/octave)
DIAPHRAGM MATERIAL	Titanium
VOICE COIL DIAMETER	74,4 mm (2,93 in)
VOICE COIL WINDING MATERIAL	Edge-wound aluminum
MAGNET MATERIAL	Neodymium
FLUX DENSITY	1,9 T
BL FACTOR	13,5 N/A
POLARITY	Positive voltage on red terminal gives positive pressure in the throat

MOUNTING INFORMATION

Overall diameter	132,5 mm (5,22 in)
Mounting holes diameter	4 M6 holes 90° at Ø102 mm (4 in)
Bolt circle diameter	102mm (4 in)
Total depth	62 mm (2,5 in)
Net weight	3,2 Kg (7,1 lb)
Shipping weight	3,4 Kg (7,5 lb)
CardBoard Packaging dimensions	132x132x68 mm (5,2x5,2x2,7 in)

ND1460 MEASURED WITH 1W INPUT ON RATED IMPEDANCE AT 1 M DISTANCE ON AXIS FROM THE MOUTH OF XT1464 HORN**FREE AIR IMPEDANCE MAGNITUDE CURVE****NOTES**

- (1) AES power rating is tested with a pink noise input having a 6 dB crest factor for two hours duration within the specified range. Power calculated on minimum impedance.
- (2) Program power rating is defined as 3 dB greater than AES rating, and is a conservative expression of the transducer ability to handle music program material.
- (3) Sensitivity is measured at 1W input on rated impedance at 1m on axis from the mouth of XT1464 horn, averaged between 1kHz and 4 kHz.

Eighteen Sound engages in research and product improvement. New materials and design refinements can be introduced into existing products without notice.

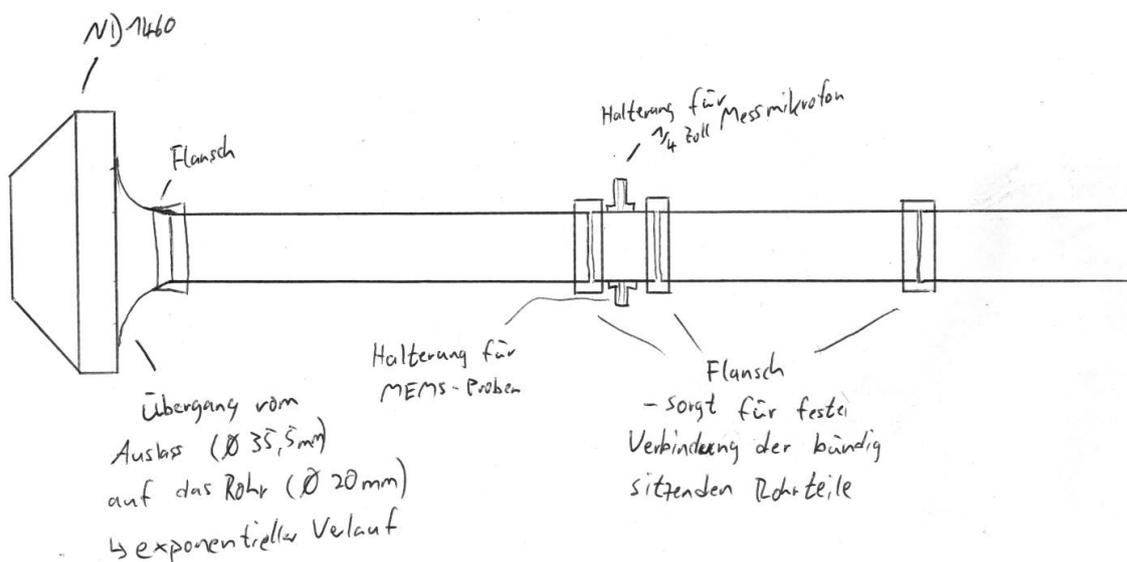


B.4 Bestelldaten des Messrohres

Messrohr

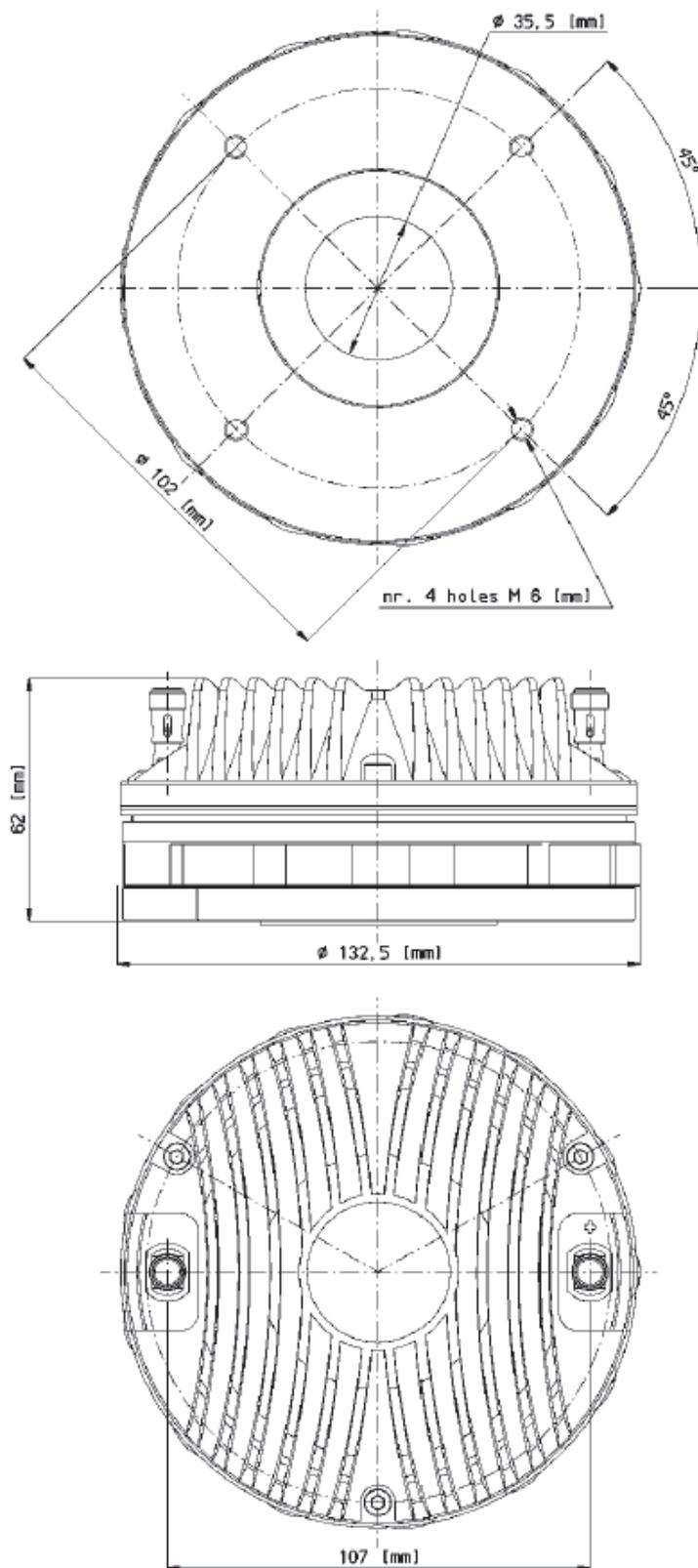
Benötigt werden (siehe Skizze unten):

- 1x Übergangsstück (vom ND1460 auf das Messrohr) von 35,5mm auf 20mm Durchmesser
- 1x Flansch (vom Übergangsstück auf das Messrohr)
- 1x Rohrstück mit Öffnungen und Halterungen für die Mikrofone und 0,05m Länge und 20mm Innendurchmesser
- 2x Rohrstück mit 1m Länge und 20mm Innendurchmesser
- 2x Rohrstück mit 0,75m Länge und 20mm Innendurchmesser
- 2x Rohrstück mit 0,5m Länge und 20mm Innendurchmesser
- 6x Flansch (um die Rohrstücke zu verbinden)

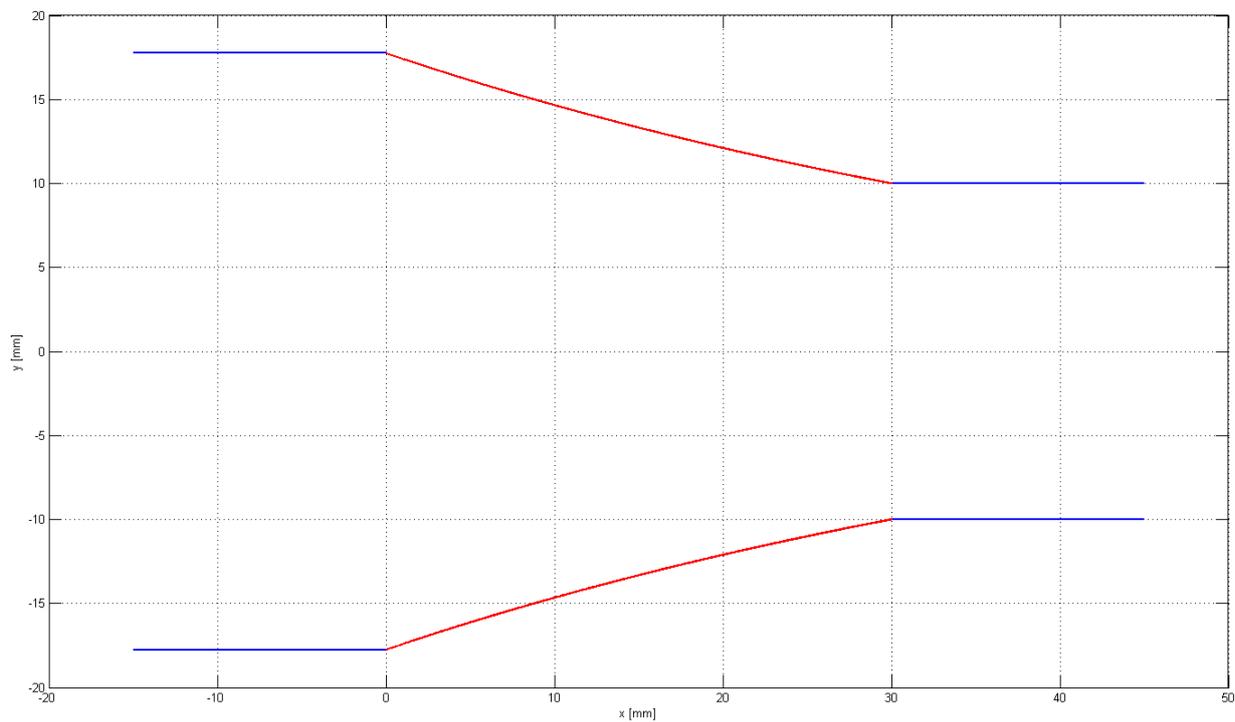


Die mit den Flanschen verbundenen Rohrteile müssen absolut bündig aneinandersitzen. Genauso muss es möglich sein, das 1/4 Zoll Messmikrofon bündig mit der Rohrwand anzubringen. Der Übergang vom Auslass des Lautsprechers auf das Rohr soll exponentiell verlaufen und bündig an das Rohr anschliessen.

Die Maße des Lautsprechers und der exponentielle Verlauf des Übergangs sind weiter unten angegeben.



1 Dimensionen vom ND1460



2 Übergangstück vom Treiber auf das Rohr

C Anhang C - Vergleichsmessungen

In diesem Anhang befinden sich die Diagramme der Schalldruckpegel, in denen die Messwerte am Impedanzmessrohr mit den simulierten Werten verglichen werden. Auch hier sind die Einflüsse, die durch Verstärker, AKG C480B, Kabel, Verluste im Rohr und Reflexionsfaktor der Membran nicht berücksichtigt worden, weswegen die Abweichungen eine gewisse Größe haben.

C.1 Länge 41cm, mit Absorber

In diesem Abschnitt besteht die Möglichkeit, in Abbildungen 50, 51 und 52 die gemessenen Schalldruckpegel für das Impedanzmessrohr mit 41cm Länge und Absorber ($r_1 = 0,15$) zu vergleichen.

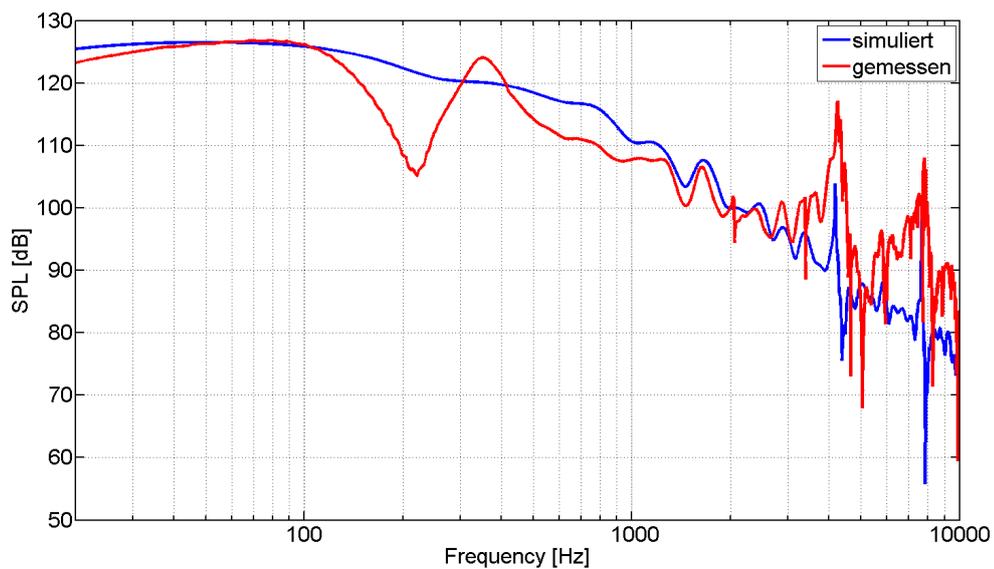


Abbildung 50: Gemessener und simulierter SPL mit Absorber ($r_1 = 0,15$), 11,5cm von der Membran entfernt.

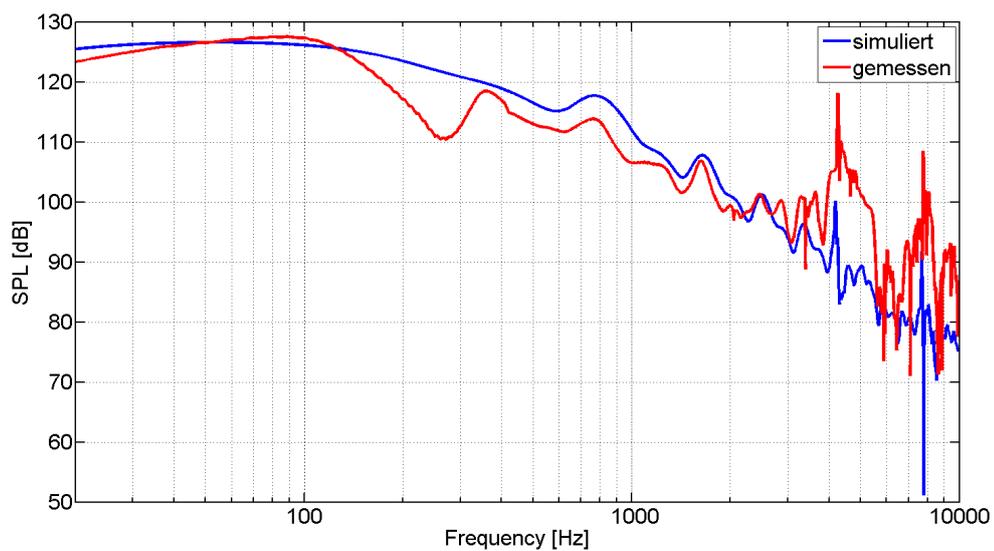


Abbildung 51: Gemessener und simulierter SPL mit Absorber ($r_1 = 0,15$), 21,5cm von der Membran entfernt.

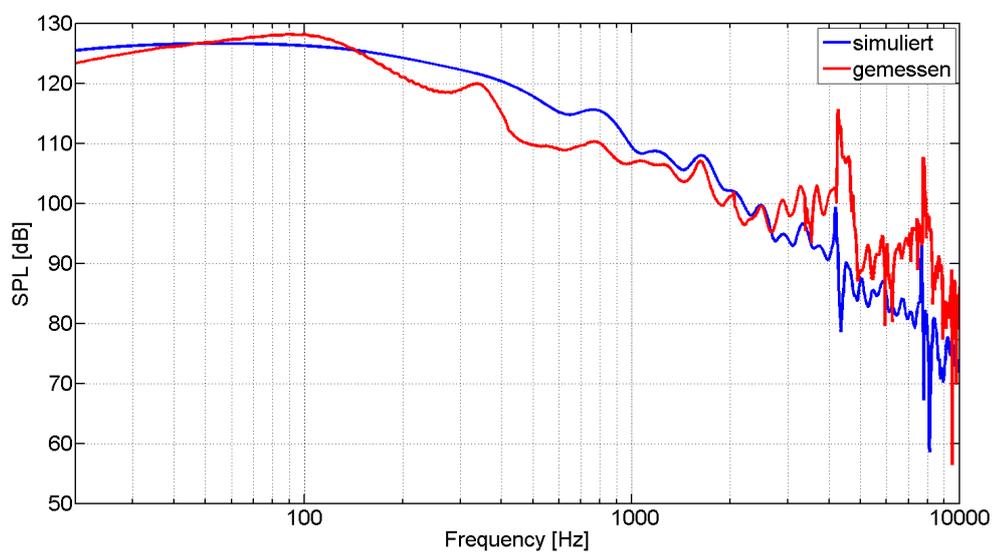


Abbildung 52: Gemessener und simulierter SPL mit Absorber ($r_1 = 0,15$), 31,5cm von der Membran entfernt.

C.2 Schallharter Abschluss

Hier werden exemplarisch Messungen des Schalldruckpegels am Impedanzrohr mit schallhartem Abschluss in zwei verschiedenen Längen mit den simulierten Ergebnissen in den Abbildungen 53, 54 und 55 gezeigt.

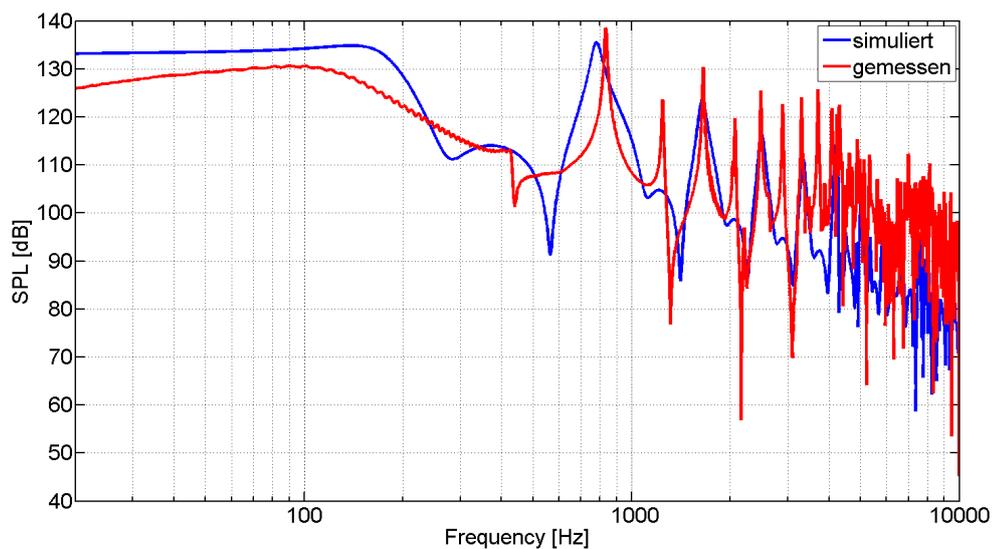


Abbildung 53: Gemessener und simulierter SPL mit schallhartem Abschluss im 41cm langen Rohr, 21,5cm von der Membran entfernt.

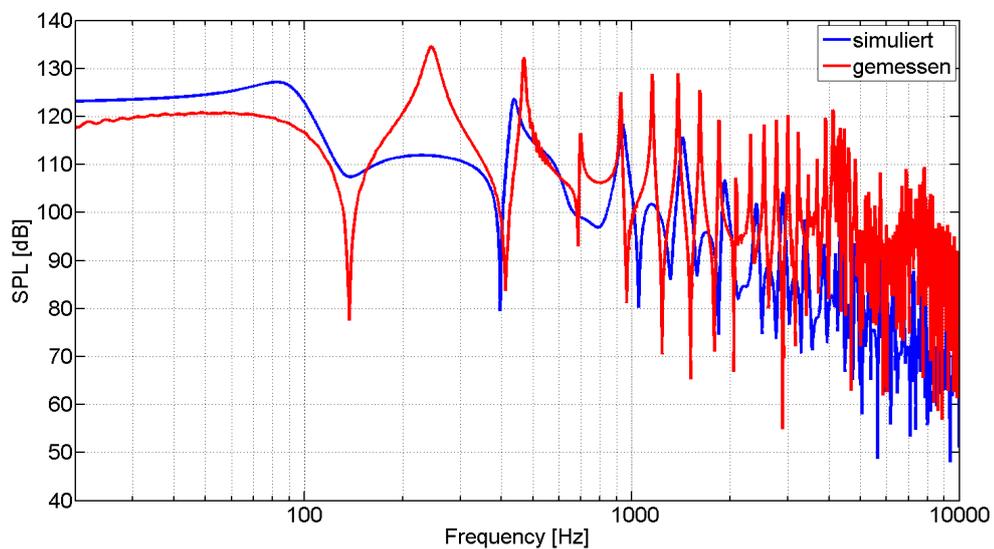


Abbildung 54: Gemessener und simulierter SPL mit schallhartem Abschluss im 74cm langen Rohr, 11,5cm von der Membran entfernt.

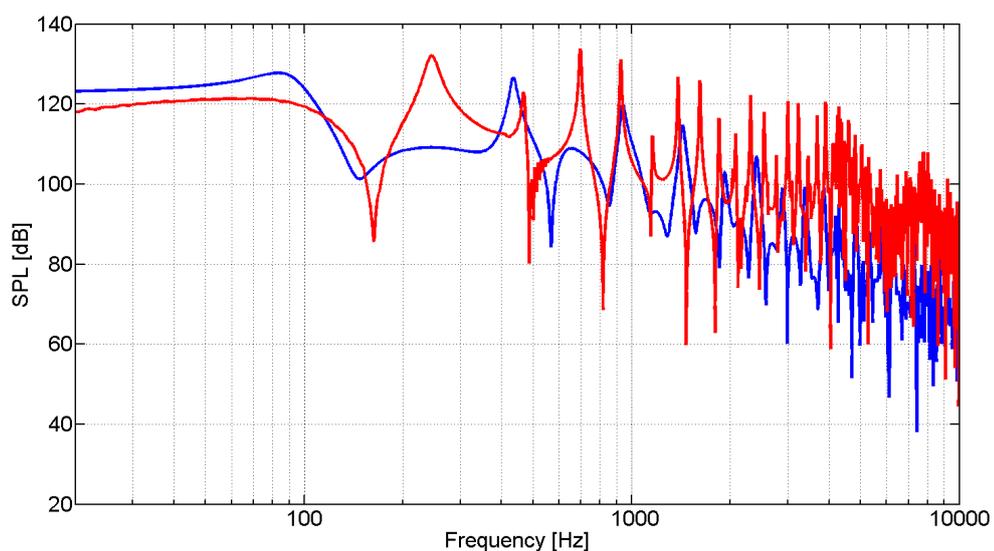


Abbildung 55: Gemessener und simulierter SPL mit schallhartem Abschluss im 74cm langen Rohr, 21,5cm von der Membran entfernt.

Literatur

- [Bru02] R. Brunnader, "Aufbau und Programmierung der 2p Messmethode im Impedanzrohr für die Messung akustischer Materialparameter," Master's thesis, Technische Universität Graz, 2002.
- [Fac] Fachnormenausschuss 208, *ISO 10534-2: Akustik - Bestimmung des Schallabsorptionsgrades und der Impedanz in Impedanzrohren*. Österreichisches Normungsinstitut, Wien.
- [Kem02] J. A. Kemp, "Theoretical and experimental study of wave propagation in brass musical instruments," Ph.D. dissertation, University of Edinburgh, 2002.
- [KFCS00] L. E. Kinsler, A. R. Frey, A. B. Coppens, and J. V. Sanders, *Fundamentals of Acoustics*, 4th ed. John Wiley & Sons, 2000.
- [Mös07] M. Möser, *Technische Akustik*. Springer Verlag, 2007.
- [SJD08] M. Suhaneck, K. Jambrosic, and H. Domitrovic, "Student project of building an impedance tube," in *Acoustics 08 Paris*, 2008.
- [Wik10a] "Wikipedia: Mikrosystem (technik)," Wikipedia, Mai 2010. [Online]. Available: [http://de.wikipedia.org/wiki/Mikrosystem_\(Technik\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Mikrosystem_(Technik))
- [Wik10b] "Wikipedia: Bessel function," Wikipedia, May 2010. [Online]. Available: http://en.wikipedia.org/wiki/Bessel_function
- [Wil99] E. G. Williams, *Fourier Acoustics*. ACADEMIC PRESS, 1999.
- [Zio95] L. J. Ziomek, *Fundamentals of Acoustic Field Theory and Space-Time Signal Processing*. CRC PRESS, Inc, 1995.
- [Zot08] F. Zotter, *Akustische Messtechnik 2, Laborunterlagen*. Institut für Elektronische Musik und Akustik, 2008.
- [Zot09] —, "Analysis and synthesis of sound-radiation with spherical arrays," Ph.D. dissertation, University of Music and Performing Arts Graz, 2009.
- [ZZ93] M. Zollner and E. Zwicker, *Elektroakustik*. Springer, 1993.